Mustafë Kadriu – Rexhep Gjergji – Islam Shehu

MATEMATIKA 11

LIBRI PËR MËSIMDHËNËS

Gjimnazi i shkencave natyrore

Prishtinë, 2019

Përmbajta

HYRJE

Hartimi i tekstit të matematikës për klasën e XI –të për gjimnazin në drejtimin e shkencave natyrore për mësimdhënës të matematikës ka për qëllim që të ndihmoj mësimdhënësve në mësimdhënie të matematikës. Të mësuarit e matematikës në klasën e XI-të nxitë nxënësit të mësojnë sistematikisht marrëdhëniet sasiore, strukturën, format, hapësirën, modelet dhe rregullsitë, analizoj fenomenet, vëzhgoi dhe përshkruaj ndryshimet në kontekste të ndryshme, siguron një gjuhë simbolike të saktë për të përshkruar, paraqitur, analizuar, rishqyrtuar, interpretuar dhe mbrojtur idetë, arsimimi i matematikës i mundëson nxënësve të fitojnë njohuri, shkathtësi, aftësi, mënyrat e të menduarit dhe qëndrime të nevojshme për pjesëmarrje të suksesshme dhe të dobishme në një shoqëria. Mësimdhënia dhe mësimi i matematikës kërkon transmetimin e njohurive nga mësimdhënësi, ndërsa nga nxënësi kërkohet të gjeneroi aftësive, shkathtësi, qëndrim, vlera dhe të menduarit logjik dhe krijues.

Pra nxënësit do të bëhen pjesëmarrës aktivë në procesin e të mësuarit dhe kështu të përgatiten mirë për të mësuarit gjatë gjithë jetës. Gjatë rrjedhës së të mësuarit të matematikës, nxënësit do të kuptojnë rëndësinë e matematikës në jetën e tyre të përditshme, fitojnë njohuri mbi zhvillimin e koncepteve të lëndës dhe arrijnë të kuptojnë rolin dhe rëndësinë e tij në shoqërinë e së kaluarës, të tashmes dhe të së ardhmes. Ata do të lidhin koncepte, shprehje, shkathtësi dhe procese të reja matematikore me ata me të cilët kanë përvojë të mëparshme dhe njohuri praktike. Ata do të fitojnë ekspozim ndaj problemeve matematikore të gjetura në situata reale, të përditshme, duke lidhur kështu lëndën me jetën dhe aktivitetet e tyre të përditshme, si dhe me fusha të tjera të edukimit të tyre. Ata do të kenë një mundësi për të aplikuar matematikën në jetën e tyre. Ata do të angazhohen në aktivitetet përkatëse matematikore si individualisht ashtu edhe në grupe (në mënyrë bashkëpunuese), të cilat do të mundësojnë në përvetësimin e koncepteve përmes rezultateve të të nxënit të përcaktuara në KK si:

I. Numri, algoritmet dhe algjebra

Nxënësi:

- Zhvillon arsyetimin algjebrik për zgjerimin e konceptit nga numri real në numrin kompleks;
- Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe shprehë numrin kompleks nga trajta algjebrike në trajtë trigonometrike;
- Përdorë simbole algjebrike për të modeluar marrëdhënie dhe situata matematike;
- Demonstron shkathtësi për veprimet, zbaton parimet dhe procedurat e veprimeve me numra kompleks në situata numerike, algjebrike;
- Zhvillon kuptimin e fuqisë dhe rrënjës së numrit kompleks me eksponent numër i plotë dhe i zbaton në situata konkrete;
- Përdorë terminologjinë matematikore dhe komunikon të arsyetuarit për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme duke lidhë konceptet (modul, argument, trajtë algjebrike) në mënyrë që të zgjidhë probleme të ndryshme;
- Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.

II. Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria

Nxënësi:

- Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
- Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
- Përdorë veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
- Përdor arsyetimin dhe vërtetimin për të zbuluar e provuar marrëdhënie gjeometrike duke përdorur prodhimin skalar (numerik), dhe vektorial të vektorëve;

III. Funksionet dhe ndryshoret

Nxënësi:

- Kuptojnë konceptin e funksionit eksponencial, logaritmik dhe përdorin simbolet.
- Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
- Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
- Zgjidh probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
- Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).

IV. Probabiliteti

Nxënësi:

- Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve;
- Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre;
- Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve;
- Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat;
- Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;

Teksti përshkruan realizimin e programit të matematikës, sistemin, rregullat dhe procedurat e të përvetësuarit të koncepteve matematike. Rregullat sigurojnë efektivitet për të mësuarit, ndërsa procedurat janë të domosdoshme për një mësim efikas, mirë të organizuar në klasë. Teksti e ndihmon mësimdhënësin që nxënësi të përmbush kompetencat kyçe dhe kompetencat e fushës së matematikës.

Nxënësi do të jetë në gjendje të kuptojë rolin e të menduarit matematik për zhvillimin e shkencës e të teknologjisë moderne, si dhe rëndësinë e zbatimit të matematikës në situatat e zgjidhjes së problemeve nga jeta reale. Programi i matematikës ka në thelbin e tij krijimin e kushteve për ndërtimin e kompetencave matematikore si dhe të kompetencave kyçe që lidhen me to. Për të realizuar në praktikë këtë lidhje, mësimdhënësi duhet të përzgjedhë situatat e të nxënit, veprimtaritë, metodat dhe mjetet e përshtatshme për procesin e të nxënit. Kompetenca përcaktohet si harmonizim i njohurive, shkathtësive, vlerave dhe qëndrimeve për të trajtuar plotësisht situatat e kontekstit. Organizimi i mësimit të matematikës me bazë kompetencat siguron zhvendosjen e fokusit të nxënies nga përmbajtja lëndore (mësuesi në qendër) në atë që nxënësit kanë nevojë të dinë dhe të bëjnë me efikasitet në situata të ndryshme (nxënësi në qendër). Kur nxënësi realizon kompetencat matematikore, ai njëkohësisht është duke zhvilluar edhe kompetencat kyçe. P.sh. kompetenca matematikore "Zgjidhja e situatës problemore" përfshin shumë nga strategjitë e zgjidhjes së situatave të ndryshme problemore në shoqëri dhe në jetën e përditshme.

Poashtu, në tekst do të bëhet lidhja e matematikës me fushat e tjera, në mënyrë që kurrikula e arsimit bazë të shihet si një e tërë për realizimin e qëllimit kryesor të formimit të nxënësve. Matematika përdoret në një numër të madh të aktiviteteve të përditshme (p.sh. në media, art, arkitekturë, biologji, inxhinieri, shkenca kompjuterike, financë, vizatime të objekteve të ndryshme etj.). Matematika u shërben të gjitha fushave, me koncepte dhe me aftësi. Nga ana tjetër edhe përmbajtja e matematikës (p.sh., numrat, raportet, figurat, kuptimi për hapësirën, përpunimi i të dhënave etj.) mund të përdoren në studimin e fushave të tjera. Ajo është një mjet ndihmës i domosdoshëm për shkencat e natyrës, por njëkohësisht, luan një rol të rëndësishëm edhe në studimin e teknologjisë, gjuhët apo shkencat shoqërore.

Lënda e matematikës zhvillohet për 36 javë mësimore, me nga 4 orë mësimore secila ore zgjatë (45min), pra gjithsej 144 orë për klasën e njëmbëdhjetë. Programi i matematikës specifikon me afërsi peshën (orët e sugjeruara) e secilës tematik. Shuma e orëve sugjeruese për secilën tematikë është e barabartë me sasinë e orëve vjetore, të përcaktuara në planin mësimor të gjimnazit. Shpërndarja e orëve ka për qëllim që mësimdhënësit si zbatues të programit të orientohen për peshën që zë secila temë në raport me orët totale vjetore. Megjithëse njohuritë përcaktohen për secilën temë, ato trajtohen të integruara dhe të lidhura me njëra – tjetrën. Brenda shumës prej 144 orë, mësimdhënësit planifikon të gjitha veprimtaritë që do të organizojë për një mësimdhënie - nxënie sa më efektive (njohuritë/shkathtësitë për realizimin e kompetencave matematikore, projektet kurrikulare, vetëvlerësime të nxënësve, testet e nxënësve apo edhe veprimtari të tjera në ndihmë të përparimit të nxënësit). Ne kemi propozuar numrin e orëve për secilin koncept dhe brenda koncepteve kemi propozuar numrin e orëve për tema. Ju mësimdhënësit si përdoruesit e programit duhet të respektojnë sasinë e orëve vjetore të lëndës, ndërsa jeni të lirë të ndryshoni me 10% - 20% të orët e rekomanduara për secilën temë.

Teksti e ndihmon mësimdhënësin që nxënësi të përmbush kompetencat:

1. Kompetenca e komunikimit,
2. Kompetenca e të menduarit arrihet
3. Kompetenca e të nxënit,
4. Kompetenca e lidhjes
5. Kompetenca për jetën
6. Kompetenca personale
7. Kompetenca qytetare
8. Kompetenca digjitale

Kompetencat që duhen të arrihen në fushën e matematikës:

1. Zgjidhja e problemeve matematike
2. Arsyetimi dhe dëshmitë matematike
3. Komunikimi matematik
4. Lidhjet në matematikë
5. Përfaqësimi matematik
6. Modelimi matematik
7. Të menduarit matematik
8. Përdorimi i teknologjisë në matematikë

Këto kompetenca arrihen përmes rezultateve të të nxënit për fushë të përcaktuara në Kurikulën Bërthamë III dhe rezultatet e të nxënit për temë të pacaktuara në planin mësimor të klasës së dhjetë.
Përmes kompetencave të matematikës, nxënësi, përzgjedh strategjitë e duhura, përmes matematikës me qëllim të zgjidhjes së situatave problemore përmes arsyetimit për **analizat** e duhura të situatës problemore**.** Gjatë zgjidhjes së problemeve matematikore mësimdhënësi i nxit nxënësit që të kërkojnë vetë rrugën deri te zgjidhja, e jo të përcjellin verbërisht modelin, gjegjësisht algoritmin e caktuar. Është, pra, qëllimi që të paraqitet matematika si proces, si aktivitet kreativ, në të cilin marrin pjesë aktive nxënësit. Para së gjithash duhet theksuar rolin e zgjidhjes dhe hulumtimit të problemeve, gjë që do të përcaktohet më detalisht në vazhdim.

Me njohuritë matematikore mund t'i përshkruajmë dhe t'i prezantojmë numerikisht, grafikisht dhe në mënyrë tjetër, shumë dukuri dhe fenomene. Kjo ka rëndësi vendimtare për shkëmbimin e ideve dhe informatave si dhe për interpretimin e tyre. Nxënësi duhet të përdor procedura për shqyrtim të supozimeve me qëllimi **interpretimi dhe vlerësimi** të zgjidhjes së problemeve nëse zgjidhja e është e saktë. **Lidhë** matematikën me konceptet brenda dhe jashtë sajë për zgjidhjen e situatave problemore përmes të **menduari**t kreativ dhe konstruktiv matematik. Gjatë zgjidhjes dhe hulumtimit të problemeve duhet analizuar / kërkuar të dhënat, të zgjidhet strategjia gjegjëse, të vlerësohet në mënyrë kritike pajtueshmërinë e zgjidhjes së problemit, por nuk mjafton vetëm njohja e përmbajtjeve dhe e proceseve, duhet të dihet të projektohet dhe të mbikëqyret rruga e zgjidhjes si dhe të merren parasysh njohuritë si dhe aftësitë e veta gjatë projektimit dhe realizimit të projektit të zgjidhjes së problemit. E tëra arrihet në konsultim me mësimdhënësin me shokët për tu bindë në rezultatin e saktë edhe duke **përdorur TIK** si reflektim të situatave.

Të mësuarit e matematikës nxënësi duhet tu sigurojë dy gjëra: ngacmimin dhe ndjenjën e suksesit. Kjo do të thotë, që çdo nxënës të përfitojë sa më shumë që të jetë e mundur. Nxënësve duhet tu ndihmojmë që në rast të zgjidhjes së suksesshme të problemit matematikor, të përfitojnë në vetëbesim dhe t'i lëshohen problemit pa frikë.

Gjatë mësimit të matematikës nxënësi duhet t'i përvetësojë konceptet dhe strukturat themelore matematikore, jo vetëm si njësi të posaçme, por edhe në ndërlidhje me koncepte dhe struktura tjera matematikore.

Gjatë mësimit të matematikës nxënësi duhet t'i përvetësojë veprimet e njehsimit, shkathtësitë praktike (psh. matjet), bazat e komunikimit matematikor dhe të ushtrohet në përdorimin e teknologjive të ndryshme (algoritmat me gojë dhe me shkrim, përdorimi i veglërie të ndryshme për njehsim).Po ashtu gjatë mësimit të matematikës nxënësi duhet t'i zhvilloi edhe proceset matematikore si: kërkimi i modeleve, vlerësimi i rezultateve, shndërrimi i problemit kompleks në detyra të posaçme, vënia e bazave dhe formulimi i hipotezave, përgjithësimi, vërtetimi. Strategjitë mund t'i kuptojmë si varg të proceseve të të menduarit. Përveç përvetësimit të nocioneve dhe shkathtësive matematikore, njohja dhe përvetësimi i proceseve dhe strategjive matematikore janë të domosdoshme për shtjellimin e situatave të problemeve.

Gjatë mësimit të matematikës nxënësit zhvillojnë shprehi të mira të punës ata le t'i njohin dhe të jenë të vetëdijshëm, se zgjidhja e detyrave matematikore, si dhe njohuritë matematikore në përgjithësi nuk kanë të bëjnë me fatin apo me talentin e posaçëm, por janë fryt i dijes së përparme, refleksionit, punës dhe motivimit.

PLANI MËSIMOR

Fusha:MATEMATIKË
Lënda: MATEMATIKË
Klasa:NJËMBËDHJETË (11-të)
DREJTIMI: Natyror

<table>
<tr><th rowspan="2">KONCEPTET</th><th rowspan="2">Temat</th><th colspan="3">TIPI I ORËS</th><th colspan="2"></th></tr>
<tr><th>Zhvillim (Zh)</th><th>Ushti me (U)</th><th>Vlerësim tematik (V)</th><th colspan="2">Totali</th></tr>
<tr><td rowspan="4">I. Numri, algjebra dhe funksioni</td><td>1. Funksioni eksponencial</td><td>7</td><td>7</td><td rowspan="2">1</td><td>14</td><td rowspan="4">48</td></tr>
<tr><td>2. Funksioni logaritmik</td><td>8</td><td>7</td><td>16</td></tr>
<tr><td>3. Përcaktorët</td><td>4</td><td>4</td><td rowspan="2">1</td><td>8</td></tr>
<tr><td>4. Numrat kompleks</td><td>5</td><td>4</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="4">II. Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>5. Trigonometria</td><td>20</td><td>9</td><td>1</td><td>30</td><td rowspan="4">76</td></tr>
<tr><td>6. Vektorët</td><td>7</td><td>5</td><td rowspan="2">1</td><td>12</td></tr>
<tr><td>7. Poliedrat</td><td>7</td><td>8</td><td>16</td></tr>
<tr><td>8. Trupat rrotullues</td><td>8</td><td>10</td><td rowspan="2">1</td><td>18</td></tr>
<tr><td>III. Përpunimi i të dhënave dhe probabiliteti</td><td>9. Probabiliteti</td><td>10</td><td>6</td><td>17</td><td>17</td></tr>
<tr><td>IV. Vlerësimi</td><td>1. Vlerësim për nxënie në periudha</td><td>/ I</td><td>/ II</td><td>/ III</td><td>3</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gjithsej</td><td>76</td><td>60</td><td>5</td><td>141</td><td>144</td></tr>
</table>

PLANI VJETOR

Plani vjetor - orienton zhvillimin e mësimit për një vit shkollor (mësimor) duke i përmbushur kërkesat e shkallës kurrikulare dhe duke i ndarë apo duke i thjeshtuar ato për klasën e caktuar (brenda shkallës).

Planifikimi vjetor ka për qëllim identifikimin e rezultateve të të nxënit të kompetencave, të cilat synohen të arrihen gjatë një viti shkollor (mësimor), si dhe identifikimin e koncepteve dhe rezultateve të të nxënit të fushës kurrikulare nga të cilat do të përcaktohen temat mësimore, që do të jenë në shërbim të arritjes së këtyre rezultateve.

PLANI VJETOR : 20___/
Fusha e kurrikulës: MATEMATIKË **Klasa : 11 - të**
Plani vjetor i shpërndarë nëpër dy mujor:

<table>
<tr><th rowspan="3">Temat</th><th colspan="2">SHPËRNDARA E TEMAVE MËSIMORE
PERIUDHA (I)</th><th rowspan="3">Kontributi në rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës</th></tr>
<tr><td>Shtator - Tetor</td><td>Nëntor – Dhjetor</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>1. Funksioni eksponencial (14 orë)</td><td>3. Trigonometria (23 orë)
4. Vektorët (6 orë)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>2. Funksioni logaritmik (15 orë)
3. Trigonometria (6 orë)</td><td>Vlerësimi i të nxënit për periudhë (2 orë)</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2">Temat</th><th colspan="2">SHPËRNDARA E TEMAVE MËSIMORE
PERIUDHA (II)</th><th rowspan="2">Kontributi në rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës</th></tr>
<tr><td>Janar - Shkurt</td><td>Mars -Prill</td></tr>
<tr><td rowspan="2"></td><td>4. Vektorët (6 orë)</td><td>6. Poliedrat (6 orë)</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>5. Përcaktorët</td><td>7. Trupat rrotullues</td></tr>
</table>

	(8 orë)	(18 orë) 8. Numrat kompleks (9 orë)	
	6. Poliedrat (10 orë)	Vlerësimi i të nxënit për periudhë (2 orë)	

Temat	SHPËRNDARA E TEMAVE MËSIMORE		Kontributi në rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës
	PERIUDHA (III)		
	Prill - Maj	Qershor	
	9. Probabiliteti (17 orë)	Vlerësimi i të nxënit për periudhë (2 orë)	

<u>Për vëmendjen tuaj</u>:
Ky është një orientim i shpërndarjes periodike (dymujore) e planit vjetor. Mbetet në kompetencat e juaja që të bëni shpërndarja mujore dhe javore.

PLANI DYMUJOR

Planifikimi dymujor ka për qëllim zbërthimin e temave mësimore në njësi mësimore, të cilat kanë për synim arritjen e rezultateve të identifikuara të të nxënit të shkallës kurrikulare (kompetencave) dhe të fushës kurrikulare, për temën mësimore të caktuar. Poashtu ka për qëllim identifikimin e rrugëve (metodologjisë), mjeteve, materialeve dhe burimeve për arritjen dhe vlerësimin e nivelit të arritjes së këtyre rezultateve.

Plani dymujor - përmban këto elemente:

- Temat mësimore,
- RNSH-të (rezultatet e kompetencave),
- RNF-të, lëndët mësimore,
- RNL, njësitë mësimore - NJM,
- Kohën e nevojshme (orët mësimore),
- Metodologjitë e mësimdhënies, metodologjitë e vlerësimit,
- Ndërlidhjen me lëndë tjera mësimore, me çështjet ndërkurrikulare dhe situatat jetësore, si dhe burimet.

PLANI DYMUJOR : SHTATOR - TETOR_

Fusha e kurrikulës: MATEMATIKË

Lënda mësimore: MATEMATIKË

Klasa: 11

Temat mësimore	Rezultatet e të nxënit për tema mësimore	Njësitë mësimore	Koha	Metodologjia e mësimdhënies	Metodologjia e vlerësimit	Ndërlidhja Çështjet ndër kurik.	Burimet

PLANI MËSIMOR JAVOR

Meqenëse plani dymujor nuk është i ndarë në javë, **plani javor** mundëson përcaktimin e njësive mësimore, të cilat do të realizohen gjatë javës për secilën lëndë mësimore. Njësitë mësimore merren nga plani dymujor.

Plani javor ka për qëllim lidhjen e njësive mësimore të lëndës mësimore në kontekst të kuptimit të situatave, problemeve, dukurive dhe ngjarjeve si çështje të ndërlidhura e jo të ndara.

PLANIFIKIMI I ORËS MËSIMORE

Plani i orës mësimore - shërben që të gjitha planifikimet e procesit mësimor të bëhen të zbatueshme në punën e drejtpërdrejtë me nxënës në klasë dhe jashtë saj, brenda një ore mësimore.

Në këtë planifikim mësimdhënësi përcakton:

- Njësinë mësimore të cilën do ta realizojë (njësia mësimore merret nga planifikimin dymujor, përkatësisht planifikimi javor);
- Rezultatet e synuara të kompetencave (të cilat i ka përcaktuar në planifikimin dymujor të temës mësimore);
- Rezultatet e synuara të fushës kurrikulare (mund të vendosen vetëm rezultatet e lëndës mësimore që korrespondojnë me rezultatet e të nxënit të fushës kurrikulare dhe këto merren nga planifikimi dymujor);

- Rezultatet e njësisë mësimore (që duhen arritur gjatë një ore mësimore, që kontribuojnë në arritjen e rezultateve të temës, shkallës apo lëndës).
- Kriteret e suksesit (të cilat duhet të caktohen në bashkëpunim me nxënësit në fillim të ores).

<table>
<tr><td colspan="2">ASPEKTET E PËRGJITHSHME TË PLANIT TË ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fusha kurrikulare: ___________ / Lënda: _________ Shkalla e kurrikulës: _____ / Klasa: ____</td></tr>
<tr><td><u>Tema (nga– plani):</u></td><td><u>Rezultati i të nxënit të temës (nga plani):</u></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës (të synuara):</u> Barten nga plani dymujor, vetem rezultati/et që lidhen me fokusin e orës mësimore.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Rezultatet e fushës së kurrikulës (të synuara) :</u> Barten nga plani dymujor, vetem rezultati/et që lidhen me fokusin e orës mësimore.</td></tr>
<tr><td colspan="2">ASPEKTET SPECIFIKE TË PLANIT TË ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Njësia mësimore:</u> (Merret nga plani dymujor, përkatësisht nga plani javor). Në raste të veçanta, nëse mësimdhënësi ka vendosur që për çështje praktike temën ta ruajë si formulim në kuadër të njësisë mësimore, atëherë në vend të njësisë mund të shënohet tema mësimore.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Fjalët kyçe</u>: Vendosen vetëm fjalët që identifikohen me njësinë mësimore që trajtohet brenda orës mësimor.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Kriteret e suksesit:</u>
Kriteret e suksesit duhet të caktohen në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës, paraprakisht mësimdhënësi mund/duhet ta bëj nje orientim në bazë të kontekstit të klasës dhe veprimtarive të planifikuara për punë me nxënës. Kriteret e suksesit të zbërthyera për rezultatin e të nxënit të orës mësimore apo rezultatin e të nxënit të temës së lëndës duhet të jenë të formuluara mirë, nuk duhet të përsërisin rezultatin e të nxënit të orës mësimore, por rezultatin e të nxënit e zbërthejnë sipas niveleve të arritjes (nivel i ulët, nivel mesatar dhe nivel i lartë) dhe sigurojnë vlerësim të drejtë për shkallën e zotërimit të rezultatit të të nxënit të orës mësimore.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Rezultati/et e të nxënit për orë mësimore:</u>Rezultatet e të nxënit për orë mësimore, duhet të jenë të definuar qartë, të matshme, me strukturë të plotë të rezultateve të nxënit (veprim+qëllim/objekt+kusht+kriter) dhe në funksion të zotërimit të rezultateve të të nxënit të temës së lëndës dhe rezultateve të nxënit të shkallës për kompetencat kryesore, rezultatet e të nxënit të fushës sipas pritshmërie të përcaktuara për shkallën përkatëse. Në raste të caktuar, kur tema nuk është zbërthyer në njësi mësimore, rezultati i temës mund të jetë edhe rezultati i një apo më shumë orëve të mësimit. Mirëpo në raste të tilla është e domosdoshme që rezultati të zbërthehet në kritere të suksesit për orë mësimore.</td></tr>
</table>

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore: Ketu vendosen të detajuara burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore që mësimdhënësi dhe nxënësit i shfrytëzojnë gjatë orës mësimore (shih orientimet e përgjithshme te plani dymujor për burimet).

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:Përshkruhet shkurtimisht me cilën/cilat lëndë mësimore dhe/apo me çështje ndërkurrikulare, situata jetësore ndërlidhet ora mësimore, në mënyrë specifike me cilat tema të lëndës/lëndëve dhe me cilat aspekte të çështjes së caktuar ndërkurrikulare ndërlidhet ora mësimore dhe veprimtaritë me nxënës.

PËRSHKRIMI I METODOLOGJISË DHE VEPRIMTARITË E PUNËS ME NXËNËS GJATË ORËS MËSIMORE

Përshkrimi duhet të përfshijë organizimin e orës së mësimit, i cili mund/duhet të përmbajë:

a. Lidhjen e temës/njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve;
b. Ndërtimin e njohurive të reja;
c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura;

VLERËSIMI I NXËNËSVE

Vlerësimi i nxënësve: Përshkruhet qasja që do të përdoret në vlerësimin formativ në raport me rezultatet e të nxënit për orë mësimore. Pjesë e përshkrimit të vlerësimit mund/duhet të jetë edhe përcaktimi i nxënësve që do të vëzhgohen gatë kësaj ore mësimi duke pasur parasysh të dhënat e mbledhura nga evidencat dhe progresi i nxënësve e progresit të tij.

Detyrat dhe puna e pavarur:Këtu përshkruhen detyrat dhe puna e pavarur që planifikohen për tu realizuar me nxënës kur vlerësohet se disa aktivitete paraprake të orës së mësimit mund të realizohen më shpejtë, apo mund të zgjatet ora e mësimit, si dhe për kohën pas orës mësimore, në mënyrë që të mos rritet ngarkesa e nxënësit në orë të mësimit. Për këtë vendos vet mësimdhënësi. Detyrat dhe puna e pavarur jashtë orës së mësimit, duhet të bëhen përpjekje që sipas rastit të jenë të integruara brenda lëndëve të fushës apo ndërmjet fushave.

Reflektimi për rrjedhën e orës mësimore: Kjo pjesë plotësohet pas përfundimit të orës mësimore. Mësimdhënësi bën një vetreflektim, vetëvlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Fusha: Matematikë
Lënda: Matematikë
Shkalla: 5
Klasa: 11
Përgatiti mësimdhënësi: X, Y
Gjimnazi: "X, Y" në Z
Temat: X
Njësia mësimore: X
Koha e realizimit: 45 minuta
Situata e të nxënit: Pyetje dhe detyra që ka të bëjë më njësinë mësimore.
Rezultatet e të nxënit të kompetencave matematikore sipas temës mësimore:
(të marrura nga programi lëndor)

1. **....**
2. **.....**
3. **......**

   .....

Nxënësi në fund të orës së mësimit:

1. ......
2. ....

Burimet: Teksti i nxënësit, tekste të tjera, kërkim i lirë në internet

Lidhja me fushat e tjera ose temat ndërkurrikulare: Shkencë, filozofi, ekonomi, biologji, kimi, etj.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve:

1. Punë e udhëhequr nga mësimdhënësi
2. Punë në grupe dyshe dhe katërshe
3. Pune individuale
4. Diskutim
5. Analizë
6. Njehsim
7. Ndërtim grafikësh
8. Zgjidhje problemore

Organizimi i orës së mësimit: Parashikimi i njohurive

Situata e të nxënit:Mësimdhënësi ka përgatitur situatën përgatitore të mësimit të ri duke udhëzuar nxënësit të sigurojnë lidhjen e asaj që e kanë mësuar më parë më njësinë e re. Mësimdhënësi fton nxënësit për diskutim duke shtruar pyetje , kërkesa të njohura të to. Pse është e rëndësishme që të mësohet njësia mësimore?

Nxehje matematikore. Gjatë nxehjes matematikore nxënësit angazhohen në diskutime, duke punuar në çifte në bankë, duke i angazhuar në tabelë apo edhe duke marr mendime me një qasje frontale me diskutime konstruktive të orientuara. Për temat e reja mësimdhënësi paraprakisht mundet me iu dhenë edhe projekte të vogla për temën. Mësimdhënësi bënë pyetje të cilat i orienton kah njësia mësimore, ndërsa nxënësit gjenerojnë informacione. (Kohëzgjatja 3- 5 minuta)

Ndërtimi i njohurive – Mësimdhënësi përcakton hapat që duhet ndërmarr gjithmonë për njësinë në kontribut të temës për t`i arritur rezultatet e të nxënit në përmbushjen e kompetencave. Gjatë ndërtimit të njohurive të reja mësimdhënësi transferon informacione e në veçanti duke bërë pyetje që nxënësit ta kuptojnë informatën , ta zbatojnë në situata reale dhe të bëjë analizë, sintezë dhe të nxjerr gjykim mbi problemin. Pyetjet kryesisht duhen të jenë konvergjente në mënyrë që secili nxënës të gjeneroi informata.

Mësimdhënësi gjatë orës mësimore kryesisht përqendrohet në:

- Metoda interaktive, bashkëvepruese, gjithëpërfshirëse, bashkëbiseduese dhe integruese.
- Punë në grupe, në çifte dhe punë individuale.
- Hetim dhe zbulim.
- Zbatim praktik në klasë dhe jashtë klase

(Kohëzgjatja 30 - 35 minuta)

Përforcimi i të nxënit – mësimdhënësi shtron disa pyetje që për qëllim ka se çka nxënësi në fund të orës duhet të jetë në gjendje të bëjnë lidhur me njësinë mësimorë. A i ka arritur qëllimin ora mësimore sa janë arritur rezultatet e të nxënit të parapara për njësinë mësimore.

(Kohë zgjatja 3-5 minuta)

Vlerësimi

Mësimdhënësi vlerëson nxënësit me simbolet vetjake në evidencë dhe njëkohësisht komunikon me nxënësit duke komentuar vlerësimin e bërë në lidhje me njësinë mësimore. Kuptimin e situatës problemore dhe shtrimin e problemit.

(Kohëzgjatja gjatë gjithë orës mësimore - vlerësim diagnostifikues, intervistë me një listë treguesish; vetëvlerësim, vlerësim për të nxënë – formativ, vlerësim me përgjigje me gojë, test për njësinë mësimore, test për temë, portëfolio, projekte të vogla).

(Kohë zgjatja gjatë gjithë orës mësimore prej pjesës hyrëse të orës deri në mbarim)

Detyra

Kryesisht jepen nga libri i nxënësit (ato të cilat nuk janë trajtuar në klasë) dhe detyra nga përmbledhja. Mund të epët edhe ndonjë projekt për temën një nxënësi apo grup nxënësish. (Kohëzgjatja 2-5 minuta).

Matematika si shkencë merret me studimin e raporteve sasiore dhe cilësore të objekteve konkrete dhe abstrakte, si dhe me studimin e formave hapësinore. Ajo është shkencë që studion relacionet dhe në thelbin e saj është kuptimi i numrit. Matematika është shkencë deduktive d.m.th përfundimet e saj janë të përgjithshme dhe janë rrjedhim logjik i aksiomave.

PLANI OPERATIV

Koncepti	Temat	Rezultatet e të nxënit të lëndës për temë (RNLT-të)
Numri, algoritmetdhealgjebra	1. Zhvillon arsyetimin algjebrik për zgjerimin e konceptit nga numri real në numrin kompleks; 2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe shprehë numrin kompleks nga trajta algjebrike në atë trigonometrike; 3. Përdorë simbole algjebrike për të modeluar marrëdhënie dhe situata matematike; 4. Manifeston kuptimin e numrave kompleks në formë aksiomatike dhe zbaton ata në zgjidhje të problemeve edhe nga jeta reale; 5. Demonstron shkathtësi për veprimet, zbaton parimet dhe procedurat e veprimeve me numra kompleks në situata numerike, algjebrike dhe trigonometrike; 6. Zhvillon kuptimin e fuqisë dhe rrënjës së numrit kompleks me eksponent numër i plotë dhe i zbaton në situata konkrete; 7. Përdorë terminologjinë matematikore dhe komunikon të arsyetuarit për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme duke lidhë konceptet(modul, argument, trajtë algjebrike, trajtë trigonometrike)në mënyrë që të zgjidhë probleme të ndryshme; 8. Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.	
	Numrat kompleks	Nxënësi: ▪ Paraqet numrin kompleks në rrafshin kompleks me koordinata polare; ▪ Përcakton modulin dhe argumentin e numrit kompleks; ▪ Shndërron numrin kompleks nga forma algjebrike në formë trigonometrike dhe anasjelltas; ▪ Kryen veprimet me numra kompleks në formë trigonometrike (shumëzimi, fuqizimi, pjesëtimi dhe rrënjëzimi); ▪ Zbaton formulën e Muavrit;

		▪ Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem për mes numrave kompleks në formë trigonometrike;
	Përcaktorët	Nxënësi: ▪ Përkufizon kuptimin e përcaktorit si vlerë numerike; ▪ Njehson vlerën e përcaktorëve të rendit të dytë dhe të rendit të tretë me anë të metodave të ndryshme (minorëve, Sarusit, trekëndëshit, etj); ▪ Zbaton vetitë e përcaktorëve; ▪ Shfrytëzon përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura (formulat e Kramerit).
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria	Nxënësi: ▪ Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë ▪ Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tredimensionalë ▪ Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesionalë. ▪ Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar; ▪ Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave; ▪ Përdorë veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika; ▪ Përdorë arsyetimin matematik për të zbuluar marrëdhënie gjeometrike duke përdorur prodhimin skalarë, vektorial dhe të përzier të vektorëve; ▪ Analizon modele që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.	
	Trupat tredimensionalë (stereometria)	Nxënësi: ▪ Përkufizon vendet gjeometrike të pikave që formojnë diedër, triedër, qoshe dhe poliedër; ▪ Identifikon prizmin, piramidën dhe paralelepipedin; ▪ Nxjerrë dhe përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e paralelepipedit kënddrejtë, prizmit të drejtë, piramidës së drejtë dhe trungut të piramidës; ▪ Identifikon trupat rrotullues; ▪ Nxjerrë dhe përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e cilindrit dhe konit; ▪ Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e

		sipërfaqes dhe vëllimin e sferës.
	Vektorët	Nxënësi: ▪ Përkufizon vektorin si segment të orientuar; ▪ Përkufizon vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt; ▪ Identifikon sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale; ▪ Përcakton projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz; ▪ Përcakton koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur; ▪ Përcakton koordinatat e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit; ▪ Gjen gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata; ▪ Kryen shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinata; ▪ Shpreh cilindo vektorë në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave; ▪ Njehson prodhimin skalar, vektroial dhe të përzier të vektorëve; ▪ Interpreton gjeometrikisht prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve; ▪ Zbaton prodhimin vektorial dhe të përzier për të njehsuar syprina apo vëllime të figurave/trupave të ndryshme të ndërtuar me vektorë, apo për zgjidhjen e problemeve të ndryshme në lidhje me syprinat e figurave apo vëllimit të trupave; ▪ Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem ermes vektorëve;
	Nxënësi: ▪ Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik. ▪ Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe	

Funksionet dhe ndryshoret		logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve; ▪ Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike; ▪ Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale dhe logaritmike; ▪ Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).
	Funksioni eksponencial	Nxënësi: ▪ Identifikon ekuacionin dhe funksionin eksponencial; ▪ Zgjidh ekuacione dhe inekuacione të ndryshme eksponenciale duke shfrytëzuar vetitë e fuqive; ▪ Ndërton funksion eksponencial si model të një marrëdhënie në mes të dy sasive; ▪ Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem për mes funksioneve eksponenciale;
	Funksioni logaritmik	Nxënësi: ▪ Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm; ▪ Shprehë logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas; ▪ Zbaton vetitë e logaritmit në situate reale; ▪ Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo ***e;*** ▪ Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilitdo numër real; ▪ Zgjidhë ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike; ▪ Paraqet grafikisht funksionet e ndryshme logaritmike; ▪ Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme; ▪ Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione logaritmike.
	Trigonometri	Nxënësi: ▪ Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë; ▪ Zgjidhë cilindo trekëndësh kënddrejtë; ▪ Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësi në radian dhe anasjelltas; ▪ Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi; ▪ Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>kuadrante;
▪ Vërteton identitetet themelore trigonometrike;
▪ Zbaton identitetet themelore trigonometrike për vërtetimin e identiteteve apo problemeve të ndryshme trigonometrike;
▪ Interpreton lidhjen në mes të funksioneve trigonometrike (është dhënë njëri nga funksionet trigonometrike – gjenden funksionet tjerat);
▪ Vërteton formulat e adicionit, të funksioneve trigonometrike të gjysmëkëndit dhe të këndit të dyfishtë;
▪ Transformon shumën dhe diferencën e funksioneve trigonometrike në prodhim dhe anasjelltas;
▪ Zgjidhë ekuacione dhe inekuacione të ndryshme trigonometrike;
▪ Përkufizon funksionet e anasjelltë trigonometrike;
▪ Gjen periodën e funksionit trigonometrik;
▪ Shqyrton dhe paraqet grafikisht funksione të ndryshme trigonometrike;
▪ Interpreton teoremën e sinusit dhe kosinusit dhe zgjidhë trekëndëshin e çfarëdoshëm;
▪ Zbaton teoremën e sinusit dhe kosinusit për zgjidhjen e problemeve të ndryshme të ndërlidhura me shkencat dhe nga jeta;
▪ Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem përmes trigonometrisë.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Të dhënat dhe probabiliteti</td>
<td colspan="2">Nxënësi:
• Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve;
• Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre;
• Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve;
• Kupton probabilitetin e pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorë ato për të interpretuar të dhënat;
• Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;
• Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të teknologjisë.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td>Nxënësi:
▪ Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme;</td>
</tr>
</table>

	Probabiliteti	▪ Kryen veprimet me ngjarje; ▪ Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij; ▪ Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të për bërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar /të përbërë; ▪ Zbaton formulën e Bajesit për llogaritjen e probabilitetit të ngjarjeve; ▪ Përkufizon ndryshoren e rastit si pasqyrim të hapësirës së ngjarjeve në bashkësinë e numrave realë; ▪ Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem përmes probabilitetit.

Do të jepen modele të orës mësimorë që iu shërben për punën e juaj. Ju jeni të lirë të vepronit në mënyrë të pa varur.

Mbani në mend
Keni tre gjëra në jeten e juaj që nuk kthehen prapa: 1. Fjala e thënë 2. Koha kalon 3. Rasti i humbur
Keni tre gjëra në jetën e juaj që mund të iu shkatërrojnë: 1. Gënjeshtra 2. Xhelozia 3. Krenaria e tepruar
Keni tre gjëra në jetën e juaj që nuk duhet humbur: 1. Durimin 2. Shpresa 3. Nderi
Keni tre gjëra në jetën e juaj me vlerë të pafundme: 1. Familja 2. Shoqëria 3. Dashuria

KAPITULLI **1. FUNKSIONET DHE EKUACIONET EKSPONENCIALE**

Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**

Njësia mësimore: **1.1**. Pëkufizimi dhe vetitë e funksionit eksponencial

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**

Grafiku dhe vetitë e funksioneve eksponenciale</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Identifikon ekuacionin dhe funksionin eksponencial;
2. Zgjidhë ekuacione dhe inekuacione të ndryshme eksponenciale duke shfrytëzuar vetitë e fuqive;
3. Ndërton funksion eksponencial si model të një marrëdhënie në mes të dy sasive.
4. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem përmes funksioneve eksponenciale;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
1.1. Pëkufizimi dhe vetitë e funksionit eksponencial</td><td colspan="3">**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:**
1. Përkufizon funksionit eksponencial dhe interpreton vetit</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:**
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverze (anasjelltë) (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Qasja e të nxënit:**
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për vetitë e funksionit eksponencial.</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Fjalët kyçe:** funksion eksponencial, grafik</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Kriteret e suksesit:**</td></tr>
</table>

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni funksionin eksponencial dhe interpreton vetitë e tij

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhjes me detyra, interneti, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoi funksionin eksponencial dhe të përvetësoi vetit e tij

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet funksion?
2. Si e kuptoni termin eksponent?
3. Ku dallohet fuqia nga eksponenti?
4. Të shënohet në tabelë një funksion fuqi (p.sh. $\mathrm{m}(x)=x^4$).
5. Të shënohet në tabelë ndërrimi i vendeve në mes të koeficientit me fuqinë ($n(x)=4^x$) .

pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimëdhënësi, shënon në tabelë:

1. Pëkufizimi dhe vetitë e funksionit eksponencial

Mësimdhënësi, fillon me:

Nëse vërejmë dy funksione f dhe g të dhëna me $f(x)=2^x$ dhe $g(x)=x^2$ shohim se nuk janë funksione të njëjta e faktikisht, ato as nuk janë të ngjashëm e as të ndërlidhur njëri me tjetrin. Funksioni i $g(x)$ quhet funksion fuqi, dhe është një rast i veçantë i funksionit polinom. Variabëli x është në fuqinë e 2-të. Ndërsa në funksionin $f(x)=2^x$ variabëli paraqitet në eksponent.

Pra, do të shqyrtojmë funksionin i cili përkufizohet me ndihmën e fuqisë, ku eksponenti është variabël (ndryshore), ndërsa baza konstante. Duke zgjeruar kuptimin e fuqisë, shprehja b^x $(b>0, x\in R)$ është një numër $y\in R$.

Përkufizim : ***Funksion eksponencial*** *me bazë b quhet funksioni f i dhënë me:*

$$f(x)=b^x, \text{ për } b>0 \text{ dhe } b\neq 1,$$

*ndërsa grafiku i tij quhet **lakore eksponenciale.***

Vetitë themelore të këtij funksioni rrjedhin nga vetitë e fuqive.

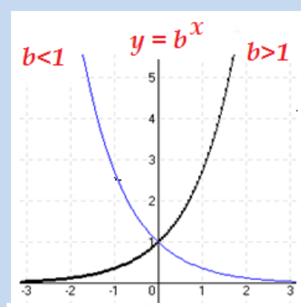
Vetitë e përgjithshme të funksioneve eksponenciale:

- Domeni është bashkësia e numrave realë.
- Kodomen është bashkësia e numrave realë pozitiv.
- Grafikët janë të vazhdueshëm.
- Funksionet eksponenciale boshtin O_y e prejnë në $y=1$.
- Funksionet eksponenciale nuk kanë zero.
- Lakoret eksponenciale i afrohen boshtit O_x në njërën anë në mënyrë asimptotike, d.m.th. afrohen pambarimisht afër por asnjëherë nuk e takojnë atë, pra, është asimptotë.
- Nëse $b>1$, atëherë b^x rritet me rritjen e $x-$it.

Me të vërtet,. është e qartë se $b^o=1$, kurse $x>0 \Leftrightarrow b^x>1$, ndërsa $x<0 \Leftrightarrow b^x<1$.
Prandaj, duke lëvizur në kahun pozitiv të boshtit x, grafiku i funksionit rritet dhe kalon nëpër pikën $(0,1)$.

- Nëse $b<1$, atëherë b^x zvogëlohet me zvogëlimin e $x-$it.

  Me të vërtet, nëse $b<1$, mund të shkruajmë $b=\frac{1}{a}$, ku $a>1$. Kështu që $b^x=\frac{1}{a^x}$. Nëse x rritet, rritet edhe a^x, ndërsa vlera e shprehjes $\frac{1}{a^x}$ zvogëlohet. Grafiku i funksionit ka gjithnjë rënie, nëse shkohet në kahun pozitiv të boshtit x dhe kalon nëpër pikën (0,1).



- Nëse $b=1$, atëherë funksioni $f(x)=b^x$ ka vlerë konstante për çdo $x\in R$.

  Me të vërtet, nëse është $b=1$, funksioni është $f(x)=1^x=1, \forall x\in R$.

  Në këtë rast, grafiku i $f(x)=b^x$ është drejtëz paralele me boshtin x.

- Funksioni eksponencial është funksion bijektiv (një-një dhe mbi), d.m.th. ekziston funksioni invers i tij, i cili shqyrtohet në kapitullin vijues.

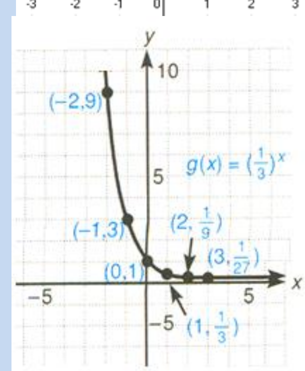


Fig.2

Grafiku i funksionit eksponencial është dhënë në Fig.1.

Shembulli 1. Të skicohet grafiku i funksionit ekpsponencial:

a. $f(x)=3^x$. **b.** $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Zgjidhja. **a.** Formojmë tabelën:

x	-3	-2	-1	0	1	2

$f(x) = 3^x$	$3^{-3} = \frac{1}{27}$	$3^{-2} = \frac{1}{9}$	$3^{-1} = \frac{1}{3}$	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$

Grafiku i funksionit paraqitet në Fig.2.

b. Formojmë tabelën:

x	-2	-1	0	1	2
$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 1$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = \frac{1}{9}$

Grafiku i funksionit paraqitet në Fig.3.

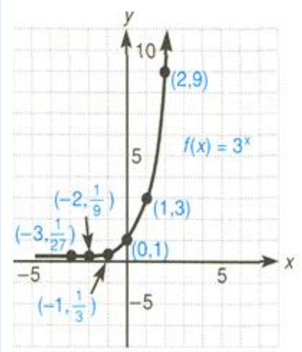


Fig.3

Shembulli 2. Caktoni pozitën e grafikut të funksionit 3^x ndaj grafikut të funksionit 2^x.
Zgjidhja. Duke marrë parasysh vlerat:

x	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
3^x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

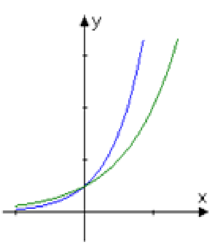


Fig. 4.

fitojmë grafikët përkatës të funksioneve, fig.4.

Të dy grafikët kanë pikë të përbashkët pikën $(0,1)$. Për $x<0$ grafiku i funksionit 3^x është nën, ndërsa për $x>0$ është mbi grafikun e funksionit 2^x.

Problemi 2.
Është i njohur tregimi i famshëm për shpikësin e shahut, të cilit mbreti për ketë lojë të mrekullueshme i ofroi shpërblim. Mbreti i ofroi atij realizimin e një dëshire. Pa hezituar fare, shpikësi i tha se dëshironte që mbreti të vendoste një kokërr oriz në katrorin e parë të tabelës së shahut, dy në të dytën, katër në të tretën, etj., pra

të dyfishonte numrin e kokrrave të orizit gjithë kohën gjersa të plotësohen të gjithë katrorët.
Nuk tingëllon se sasia e përgjithshme e orizit do të ishte e madhe apo jo? Megjithatë, duke marrë parasysh se tabela e shahut ka 64 katrorë, numri i kokrrave të orizit në katrorin e funksionit do të jetë 2^{63} që është afërsisht sa numri 1 i përcjell me 19 zero. Kjo është për shumë herë më tepër se sasia e përgjithshme e grurit që kultivohet në tokë gjatë një viti.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësi bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.
Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Për rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orën me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.
P.sh. mësimdhënsi vije në përfundim se funksioni eksponencial, me përvetësimin e vetive të tij mund të paraqitet grafikisht dhe ka mundësi të zbatohet në zgjidhje të problemeve(lexo librin e nxënësit). Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyrë konstruktive dhe të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemi të dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, parashtron pyetje dhe shfaq mendime për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**
Njësia mësimore: **1.2**. Zbatime të funksioneve eksponenciale

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Identifikon ekuacionin dhe funksionin eksponencial;
2. Zgjidhë ekuacione dhe inekuacione të ndryshme eksponenciale duke shfrytëzuar vetitë e fuqive;
3. Ndërton funksion eksponencial si model të një marrëdhënie në mes të dy sasive.
4. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem përmes funksioneve eksponenciale;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
1.2. Zbatime të funksioneve eksponenciale</td><td colspan="3">**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:**
1. Zbaton funksionin eksponencial</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:**
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
6. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverze (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Qasja e të nxënit:**
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për zbatimin e funksionit eksponencial.</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Fjalët kyçe:** funksion eksponencial, zbatim</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Kriteret e suksesit:**
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
2. Të zbatoni funksionin eksponencial në probleme të ndryshme dhe nga jeta</td></tr>
</table>

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zbatoi funksionin eksponencial në zgjidhje të problemeve në situata reale.

Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet funksion eksponenecial?
2. Shëno vetitë e funksionit eksponenecial?

   Mësimdhënësi shënon në tabelë:

2. *Zbatime të funksioneve eksponenciale*

Mësimdhënësi jep disa shembuj për zbatimin e funksioneve eksponenciale:

I. Procesi i shtimit (popullsisë, etj.)
II. Zbërthimi radioaktiv, dhe
III. Interesi i përbërë.

I. Procesi i shtimit (popullsisë, etj.)

Këtu kemi të bëjë me shtimin e populacionit të organizmave siç janë njerëzit, kafshët, insektet dhe bakteret. Për shkak të ndarjes së qelizave populacionet tentojmë të rriten në mënyrë eksponenciale. Kjo nënkupton se rritja e tyre varet në çdo moment kohor nga numri i qelizave aktive. Duke supozuar se në fazën e rritjes të gjitha qelizat do të dyfishohen brenda një periudhe të caktuar kohore-*koha e dyfishimit*-ky parametër është masë e përshtatshme dhe e lehtë për të kuptuar shkallën e rritjes. Është koha që nevojitet për t'u dyfishuar populacioni.

Për intervale më të shkurta kohore t rritja e populacionit mund të përshkruhet me anë të modelit:

$$P = f(t) = P_0 \cdot 2^{\frac{t}{d}},$$

ku:

- P është populacioni në kohën t,
- P_0 është populacioni në kohën $t = 0$, dhe
- d është koha e dyfishimit.

Vërejmë se kur $t = d$ kemi: $P = f(d) = P_0 \cdot 2^{\frac{d}{d}} = P_0 \cdot 2$.

Populacioni është dyfishuar, ashtu edhe siç pritet.

Shembulli 3. Meksika, që ka një popullsi prej rreth 100 milion banorë, vlerësohet se do të dyfishohet gjatë 21 viteve. Duke supozuar se popullsia rritet në mënyrë konstante, me të njëjtën normë-shkallë, sa do të jetë popullata

a. Pas 15 vitesh? **b.** Pas 30 vitesh?

Zgjidhja. E përdorim modelin e mësipërm me këta parametra: $P_0 = 100$ milion dhe $d = 21$.

a. $P(t) = P(15) = 100 \cdot 2^{\frac{15}{21}} = 164.067$ milion.

b. $P(t) = P(30) = 100 \cdot 2^{\frac{30}{21}} = 269.18$ milion.

Shembulli 4. Numri fillestar i baktereve në një lokacion është 3000. Ky numër trefishohet çdo 15 orë. Sa do të jetë numri i baktereve pas:

a. 15 orësh; **b.** 30 orësh; **c.** 45 orësh ?

Të shkruhet ekuacioni për numrin N të baktereve në atë lokacion pas t orësh.

Zgjidhja. Meqë numri i baktereve *trefishohet* (rritet 3 herë) për çdo 15 orë, atëherë pas:

a. 15 orësh, kemi $3000 \cdot 3 = 9000$ baktere;

b. 30 orësh numri i baktereve do të jetë

$$(3000 \cdot 3) \cdot 3 = 3000 \cdot 3^2 = 3000 \cdot 9 = 27000 \text{ baktere;}$$

c. 45 orësh numri i baktereve do të jetë

$$(3000 \cdot 3) \cdot 3 \cdot 3 = 3000 \cdot 3^3 = 3000 \cdot 27 = 81000 \text{ baktere.}$$

Për t orë, numri i baktereve trefishohet dhe gjendet sipas formulës $\frac{t}{15}$ sepse trefishohen çdo 15 orë.

Prandaj, numri, N, i baktereve jepet me formulën $N = 3000 \cdot 3^{t/15}$.

II. Zbërthimi radioaktiv

Këtu kemi të bëjë me zbërthimin radioaktiv, i cili thjesht mund të mendohet si fenomen i rritjes negative. Zbërthimi nënkupton se nëse filloni me një sasi A të një izotopi radioaktiv, sasia zvogëlohet në mënyrë eksponenciale përgjatë kohës. E ashtuquajtura *gjysmë-kohë* është veti e secilit izotopi radioaktiv. Ajo definon shkallën e zbërthimit në funksion të kohës që i nevojitet materialit për t'u zbërthyer tek gjysma e sasisë fillestare.

Përgjatë çfarëdo periudhe tjetër kohore t zbërthimi mund të përshkruhet me anë të modelit:

$$A = f(t) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{h}},$$

ku

- A është sasia në kohën t,
- A_0 është sasia në kohën $t = 0$, dhe

- h është gjysmë-jeta.

Vërejmë se kur $t = h$ kemi: $A = f(h) = A_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{h}} = A_0 \cdot \frac{1}{2}$.

Sasia është pikërisht gjysma e materies fillestare, ashtu edhe siç pritej.

Shembulli 5. Izotopi radioaktiv i galiumit-67 e ka gjysmë-jetën prej 46.5 orësh. Nëse fillojmë me 100 miligram të këtij izotopi, sa miligram do të mbeten pas

a. 24 orësh? **b.** 1 javë?

Zgjidhja. Duke përdor modelin e mësipërm të zbërthimit radioaktiv me këta parametra:

$A_0 = 100\,mg,\ h = 46.5$ dhe 1 javë $= 7 \cdot 24 = 168$ orë.

a. $A = f(t = 24) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{24}{46.5}} = 69.925$ miligram.

b. $A = f(t = 168) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{168}{46.5}} = 8.173$ miligram.

Interesi (kamata) i Përbërë

$Kn = K0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{n}$

Kn- Vlera e Ardhshme e Kapitalit
K0 – Vlera e Tashme e Kapitalit
I = Kn – Ko

III. Interesi i përbërë

Zbatimi i tretë i drejtpërdrejtë lidhet me banka dhe financa. Ka të bëjë me *interesin*, i cili në përgjithësi njehsohet si përqindje e parasë së kursyer ose huazuar (kapitali) për një periudhë kohore. Më së shpeshti përqindja është shuma që pritet për një vit, por siç e dini të gjithë, norma e interesit mund të definohet edhe për periudha të tjera.

Nëse në fund të një periudhe të interesit, interesi që kemi fituar nga një depozitë kursimi i shtohet bilancit, atëherë në periudhën tjetër, jo vetëm që fitojmë nga depozita fillestare por edhe nga interesi që morëm në periudhën paraprake. Me fjalë të tjera, interesi është paguar në interes. Ky quhet *interes i përbërë.*

Supozojmë se norma e interesit është i për vit, dhe kapitalizohet në bazë vjetore. Kjo nënkupton se interesi kapitalizohet (i shtohet bilancit) në fund të vitit.

Nëse $B_1, B_2, B_3, B_4, \cdots$ janë bilancet pas 1, 2, 3, 4, $\cdots$ vitesh, përkatësisht, atëherë modeli vijues përshkruan bilancin pas n periudhash interesi (vitesh):

$B_n = D \cdot (1+i)^n = D \cdot q^n$ ku

- B_n = bilanci pas n periudhash interesi
- D = depozita në periudhën $n = 0$
- i = norma e interesit për një periudhë interesi (vit)
- $q = 1 + i$ = faktori i interesit (bilanci plus interesi).

Shembulli 6. Supozojmë se keni depozituar $D = 1000\,€$ në një llogari bankare me normë nominale të interesit $i = 6\%$, të kapitalizuar në bazë vjetore.

a. Sa do të jetë bilanci pas 10 vitesh?

b. Nëse dëshironi që bilanci të dyfishohet pas 10 vitesh, sa e lartë duhet të jetë norma e interesit?

Zgjidhja.

a. $D=1000,\ \ i=0.06,\ \ q=1.06,\ \ n=10,\ \ B_{10}=?$

$$B_{10}=D\cdot q^{10}=1000\cdot 1.06^{10}=1790.85€.$$

b. $D=1000,\ \ i=0.06,\ \ n=10,\ \ B_{10}=2000,\ \ q=?$

Nga modeli i mësipërm kemi:

$$B_n=P\cdot(1+i)^n \Rightarrow (1+i)^n=\frac{B_n}{P}$$

$$\Rightarrow 1+i=\sqrt[n]{\frac{B_n}{P}} \Rightarrow i=\sqrt[n]{\frac{B_n}{P}}-1$$

$$i=\sqrt[10]{2}-1=2^{\frac{1}{10}}-1=1.07177-1=0.07177.$$

Andaj, për të dyfishuar kapitalin në 10 periudha interesi, norma e interesit duhet të jetë $i=7.177\%$.↑

b. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimi dhe rrjedha e orës mësimore: mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. arsimtari vije në përfundim se funksioni eksponencial ka mundësi të zbatohet në zgjidhje të problemeve të ndryshme, dhe këtu pastaj e vë theksin. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

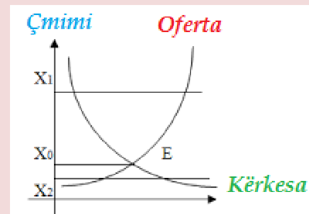


Fig. 5

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive dhe të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në përmbushjen e kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**

Njësia mësimore: **1**.3. Funksioni eksponencial me bazë „e"

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Funksionet dhe ndryshoret**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE** $e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\mathbf{2} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\mathbf{4} + \ddots}}}}}$	Nxënësi: 1. Identifikon ekuacionin dhe funksionin eksponencial; 2. Zgjidhë ekuacione dhe inekuacione të ndryshme eksponenciale duke shfrytëzuar vetitë e fuqive; 3. Ndërton funksion eksponencial si model të një marrëdhënie në mes të dy sasive. 4. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem përmes funksioneve eksponenciale;		

Njësia mësimore: 1.3. Funksioni eksponencial me bazë „e”	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 2. Përkufizon funksionit eksponencial me bazë „e”

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverze (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për funksionin eksponencial me bazë „e”.

Fjalët kyçe: funksion eksponencial, grafik, baza „e”

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni funksionin eksponencial me bazë „e” dhe të paraqet grafikisht.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoi funksionin eksponencial me bazë „e” dhe të paraqes grafikun e tij.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet funksion eksponencial ?
2. Të paraqes grafikun e funksionit eksponencial me bazë 2, 3 dhe me bazë 10?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi, shënon në tabelë:

3. Funksioni eksponencial me bazë „e”

Mësimdhënësi:

Konstanta e paraqitet natyrshëm kur shqyrtojmë interesin e përberë. Është një rast i mirë që të diskutohen disa aspekte të interesit të përberë që ndërlidhen me të ashtuquajturin *funksionin-e,* i cili është sinonim për funksionin eksponencial me bazë *e*.

$y = f(x) = e^x$, ku $e = 2.71828\cdots$.

Në modelin e interesit të përbërë kemi

$$B_n = D\cdot(1+i)^n = D\cdot q^n$$

ku është supozuar se interesi është paguar (kapitalizuar) në baza vjetore. Nëse interesi i (e ashtuquajtura norma nominale vjetore) kapitalizohet në katër muaj, muaj ose edhe në baza ditore, frekuenca e kapitalizmit është:

- $B_1 = D\cdot\left(1+\frac{i}{4}\right)^4$ nëse kapitalizohet në katër muaj
- $B_1 = D\cdot\left(1+\frac{i}{12}\right)^{12}$ nëse kapitalizohet në muaj
- $B_1 = D\cdot\left(1+\frac{i}{360}\right)^{360}$ nëse kapitalizohet në ditë.

Përgjithësimi i formulave për kapitalizim p herë brenda vitit jep:

- $B_1 = D\cdot\left(1+\frac{i}{p}\right)^p$ nëse kapitalizohet p herë.

Bilanci pas t viteve do të jetë:

- $B_t = D\cdot\left(\left(1+\frac{i}{p}\right)^p\right)^t = D\cdot\left(1+\frac{i}{p}\right)^{pt}$. (

Duke zëvendësuar $\frac{i}{p}=\frac{1}{x} \Rightarrow p = i\cdot x$ merret një trajtë tjetër për të njëjtën formulë:

- $B_t = D\cdot\left(1+\frac{i}{p}\right)^{pt} = D\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xit} = D\cdot\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{it}$.

Deri tash kemi bërë vetëm disa transformime të thjeshta algjebrike.

Megjithatë, nëse vështrojmë më me kujdes në shprehjen brenda kllapave kuptojmë se ajo tenton t'i afrohet një vlere kufitare-limiti (Limitet nxënësi i mëson në klasën e 12-të).

x	$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$
1	2
10	2.59374246
50	2.69158880
100	2.704813829
500	2.715568520
1000	2.716923932
5000	2.718010050
10000	2.71814592
100000	2.71826824

Tabela 3.3: Procesi i kufirit për numrin e

Ndonëse ky varg i numrave nuk është vërtetim, shihet shumë qartë se i afrohet numrit iracional *e*.

$$e = 2.7182818\cdots.$$

Nëse në një depozitë D është kapitalizuar vazhdimisht me normë nominale të interesit të $i-$së, bilanci B_t pas kohës t jepet me:

$$B_t = f(t) = D\cdot e^{it}.$$

Shembulli 7. Një depozitë prej 1000 € do të kapitalizohet për $t=5$ vite me normë nominale të interesit $i=5\%$:

a. vjetor, **b.** tremujor, **c.** mujor,
d. ditor, **e.** vazhdimisht.

Sa do të jetë bilanci në secilin rast?

Zgjidhja. Kemi:

a. $p=1$: $B_5 = 1000\cdot(1+0.06)^5 = 1338,23$ €.

b. $p=4$: $B_5 = 1000\cdot\left(1+\frac{0.06}{4}\right)^{4\cdot 5} = 1346,86$ €.

c. $p=12$: $B_5 = 1000\cdot\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{12\cdot 5} = 1348,85$ €.

d. $p=360$: $B_5 = 1000\cdot\left(1+\frac{0.06}{360}\right)^{360\cdot 5} = 1349,83$ €.

e. $p=\infty$: $B_5 = 1000\cdot e^{0.06\cdot 5} = 1349,86$ €.

Shembulli 8. Fitimi (profiti) i një kompanie vazhdimit është rritur prej 2.74 milion euro në vitin 2017 deri në 5.87 milion euro në vitin 2022.

a. Fitimi të shprehet si funksion eksponencial i kohës $\pi(t)=Ke^{it}$ dhe të gjendet norma e rritjes vjetore.

b. Të vlerësohet fitimi për vitin 2023.

Zgjidhja. **a.** Le të jetë viti 2015 viti bazë me $t=0$. Atëherë vitit 2022 i përgjigjet $t=7$. Kemi:

$$2.74=\pi(0)=Ke^{it}=K$$

$$5.87=\pi(7)=Ke^{i7}.$$

Duke zëvendësuar vlerën e K kemi $5.87=2.74e^{7i}$. Rrjedhimisht,

$$e^{7i}=\frac{5.87}{2.74}=2.14,\ 7i=\ln 2.14=0.762,\ i=0.1087.$$

Norma e rritjes është përafërsisht është rreth 11%. Fitimi llogaritet me funksionin $\pi(t)=2.74e^{0.1087t}$.

b. $\pi(8)=6.54$.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuar çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu ai bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri Përmbledhje detyrash dhe formulohen detyra në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin dhe rrjedhën e orës mësimore: mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Sheh çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

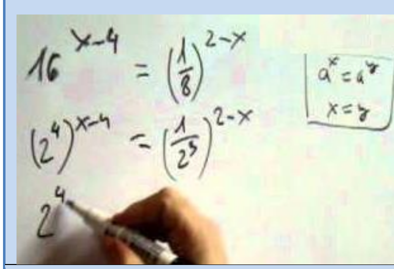
P.sh. vije në përfundim se funksioni eksponencial me bazë „e" pra $y=f(x)=e^x$ mund të paraqitet e grafikisht dhe ka mundësi të zbatohet mjaft në zgjidhje të problemeve(lexo librin e nxënësit). Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**
Njësia mësimore: **1.4**. Ekuacionet eksponenciale

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE
</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Identifikon ekuacionin dhe funksionin eksponencial;
2. Zgjidhë ekuacione dhe inekuacione të ndryshme eksponenciale duke shfrytëzuar vetitë e fuqive;
3. Ndërton funksion eksponencial si model të një marrëdhënie në mes të dy sasive.
4. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem përmes funksioneve eksponenciale;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
1.4. Ekuacionet eksponenciale</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Zgjidh ekuacionet eksponencial</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;</td></tr>
</table>

5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverze (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për vetit e funksionit eksponencial.

Fjalët kyçe: ekuacion eksponencial, zgjidhje

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të zgjidhni ekuacionet eksponencial të formave të thjeshta

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zgjidh ekuacionet eksponencial.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet ekuacion (barazim)?
2. Të shënohet një funksion eksponencial? P.sh. $y = a^x$
3. Të shënohet në vendin e y një konstantë ? P.sh. $b = a^x$

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi, shënon në tabelë:

5. Ekuacionet eksponenciale

Mësimdhënësi, p**ërkufizon** ekuacionin eksponencial:

Ekuacionet në të cilat e panjohura paraqitet në eksponent të ndonjë fuqie quhen ***ekuacione eksponenciale.***

Të tilla janë, për shembull, ekuacionet:

$$2^x = 8, \quad b^x\sqrt{b} = \sqrt[x]{b^3}, \quad 27^x = \frac{1}{9}, \quad 2^x = 5,$$

ose ekuacionet në të cilat x paraqitet në eksponent, por edhe si bazë e fuqisë:

$$3^x - 2x = 0, \qquad 2^x = x + 1.$$

Ekuacionet eksponenciale mund të zgjidhen vetëm në raste të rralla me anën e veprimeve elementare, por as atëherë nuk ekziston ndonjë metodë e përgjithshme që do të mund të zbatohej.

Përkujtojmë një veti të rëndësishme të fuqive:

Për çfarëdo numrash realë x, y *dhe* $a,\ a>0, a\neq 1$,

$$\text{nëse } b^x = b^y \text{, atëherë } x = y\,.$$

Për këtë shkak, këtu do të zgjidhen më parë ekuacionet më të thjeshta, të dy anët e të cilave mund të shprehen në formën e fuqive me baza të barabarta.

Shembulli 9. Kjo bëhet nganjëherë drejtpërdrejt, si në ekuacionin:

$$2^x = 8\,.$$

Meqë $8 = 2^3$, atëherë:

$2^x = 2^3$	8 është zëvendësuar me 2^3
$x = 3$	vetia e ekuacionit eksponencial

Shembulli 10. Ekuacioni:

$$b^x\sqrt{b} = \sqrt[x]{b^3}$$

duhet të shprehet më parë në trajtën:

$$b^x \cdot b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{x}}, \quad \text{d. m. th.} \quad b^{x+\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{x}},$$

prej nga fitohet ekuacioni i shkallës së dytë:

$$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{x},$$

dhe rrënjët e tij janë:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = -2\,.$$

Shembulli 11. Në disa raste duhet të gjejmë më parë bazën e përbashkët të të dy anëve të ekuacionit, si në ekuacionin:

$$27^x = \frac{1}{9}\,.$$

Këtu, shihet qartë se baza është 3. Kështu, shprehjen e mësipërme mund ta shkruajmë në trajtën:

$$3^{3x} = 3^{-2},$$

prej nga $3x = -2$, e pastaj $x = -\frac{2}{3}$.

Shembulli 12. Të dy anët e barazimit shpeshherë nuk mund të shprehen si fuqi të bazave të barabarta, si në ekuacionin $2^x = 5$.

Ekuacionet e tilla, si edhe disa të tjera, zgjidhen ose me anë të logaritmimit ose grafikisht, për çka do të flasim në vazhdim.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit zgjidhin ekuacionet eksponenciale. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

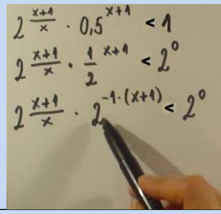
Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE

Njësia mësimore: 1.5. Inekuacionet eksponenciale

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Funksionet dhe ndryshoret**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **1. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**



Nxënësi:

1. Identifikon ekuacionin dhe funksionin eksponencial;
2. Zgjidhë ekuacione dhe inekuacione të ndryshme eksponenciale duke shfrytëzuar vetitë e fuqive;
3. Ndërton funksion eksponencial si model të një marrëdhënie në mes të dy sasive.
4. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur problem përmes funksioneve eksponenciale;

Njësia mësimore:

1.4. Ekuacionet eksponenciale

Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:

1. Zgjidh inekuacionet eksponencial

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverze (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për vetit e funksionit eksponencial.

Fjalët kyçe: inekuacion eksponencial, zgjidhje

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të zgjidhni ekuacionet eksponencial të formave të tjeshta

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zgjidh inekuacionet eksponencial.

Shtron disa pyetje. P.sh.

2. Çka quhet ekuacion eksponencial?
3. Të shënohet në tabelë forma e përgjithshme e ekuacionit eksponencial? P.sh. $a^x = b$
4. Të shënohet në vendin = njëri nga shenjat > ose < ? P.sh. $a^x > b$ apo $a^x < b$

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

6. Inekuacionet eksponenciale

Mësimdhënësi, përkufizon inekuacionin eksponencial:

Inekuacionet te të cilët e panjohura ndodhet në eksponent, quhen ***inekuacione eksponenciale.***

Për shembull:

$$3^{x+1} > 9,\quad 9^x - 3\cdot 3^x + 2 < 0, \text{ etj.}$$

Të zgjidhësh një inekuacion eksponencial do të thotë të gjesh vlerat e të panjohurës, për të cilat inekuacioni bëhet formulë e saktë.

Ekzistojnë disa lloje të inekuacioneve eksponenciale, por ne po i veçojmë këto:

1^0 $b^{f(x)} > b^{g(x)}$.

2^0 $A\cdot u^{2f(x)} + Bu^{f(x)} + C > 0$.

Në bazë të vetive të fuqive, për barazimin e formës $b^{f(x)} > b^{g(x)}$, $b \neq 1$ duhet dalluar dy raste.

Për $b > 1$ kemi $\left[b^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)\right]$,

dhe

për $0 < b < 1$ kemi $\left[b^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)\right]$.

Shembulli 13. Të zgjidhet inekuacioni eksponencial:

$$5^{7x+4} > 5^{-3}.$$

Zgjidhja. Meqë baza 5>1, atëherë $7x + 4 > -3$ prej nga $7x > -7$, përkatësisht $x > -1$. Pra, bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është bashkësia $x \in (-1, +\infty)$.

Në rastin tjetër inekuacioni i trajtës:

$$A\cdot u^{2f(x)} + Bu^{f(x)} + C > 0,$$

zgjidhet duke e marrë zëvendësimin $u^{f(x)} = t$ prej nga fitohet inekuacioni kuadratik:

$$At^2 + Bt + C > 0,\quad A \neq 0,$$

zgjidhja e të cilit është bërë më parë, andaj:

$$A(t-t_1)(t-t_2>0.$$

Shembulli 14. Të zgjidhet inekuacioni eksponencial:

$$4^x-3\cdot 2^x+2>0.$$

Zgjidhja. Ekuacioni i dhënë mund të shkruhet në këtë formë:

$$(2^x)^2-3\cdot 2^x+2>0.$$

Bëjmë zëvendësimin $2^x=t$ prej nga fitohet:

$$t^2-3t+2>0.$$

Bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të fundit është për $t<1$ dhe $t>2$. Mirëpo, meqë $2^x=t$, variabli t duhet të plotësojë kushtin $t\geq 0$, prandaj mbetet të kërkojmë zgjidhjet e inekuacionit për $1<2^x<2$. Dallohen dy raste:

$$2^x<1 \quad \text{dhe} \quad 2^x>2.$$

Zgjidhja e inekuacionit $2^x<1$ është $x\in(-\infty,0)$, ndërsa zgjidhja e inekuacionit $2^x>2$ është $x\in(1,+\infty)$. Pra, bashkësia e zgjidhjes së inekuacionit të dhënë është: $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën e orës mësimore: mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit zgjidhin inekuacionet eksponenciale. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por që të ketë ka një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

KAPITULLI **2. FUNKSIONET DHE EKUACIONET LOGARITMIKE**

Tema: **2. FUNKSIONET LOGARITMIKE**

Njësia mësimore: 2.1. Kuptimi i logaritmit

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 2. FUNKSIONET LOGARITMIKE

$\log_a b : \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm;
2. Shpreh logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas;
3. Zbaton vetitë e logaritmit për zgjidhje të detyrave të ndryshme;
4. Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo e;
5. Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilit do numër real;
6. Zgjidh ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike;
7. Paraqet grafikisht funksione të ndryshme logaritmike;
8. Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme;
9. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione logaritmike</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
2.1. Kuptimi i logaritmit</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përvetëson konceptin e logaritmit</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
2. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione</td></tr>
</table>

logaritmike).

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për zbatimin e funksionit eksponencial.

Fjalët kyçe: logaritëm

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përvetësoj konceptin e logaritmit

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësi të përvetëson konceptin e logaritmit.
Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Të shënohet forma e përgjithshëm të ekuacionit esponencial. P.sh $a^x = b$.
2. Të merret një shembull konkret e ekuacionit eksponencial. P.sh. $2^x = 4$. Sa është vlera e x? Zgjidhja është x=2
3. Të merret një shembull tjetër e ekuacionit eksponencial. P.sh. $2^x = 6$. Sa është vlera e x? Zgjidhja është x=?

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi, shënon në tabelë:

1. Kuptimi i logaritmit

Mësimdhënësi përkufizon logaritmin:
N*ë qoftë se* $b>0,\ b\neq 1$, *atëherë barazimi* $x=b^y$ *është ekuivalent me* $y=\log_b x$.

Pra, *logaritëm i numrit* x $(x>0)$, *për bazën* b $(b>0,\ b\neq 1)$, *quhet eksponenti i fuqisë, në të cilën duhet ngritur baza* b *në mënyrë që të japë numrin* x.

Termi "l*ogaritëm*" rrjedh nga greqishtja dhe nënkupton "numër relacioni", të cilin e zgjodhi Neperi. Ndërsa shprehja $\log_b x$ lexohet: "*logaritmi i* x *për bazën* b".

Nga përkufizimi i logaritmit rrjedhin këto veti:

- Çdo numër pozitiv ka një logaritëm të vetëm për bazën e dhënë b $(b>0 \wedge b\neq 1)$;
- Numrat negativë dhe zeroja nuk kanë logaritme;
- Logaritmi i njëshit për çfarëdo baze është baras me 0, sepse $b^0=1 \Rightarrow \log_b 1=0$;
- Logaritmi i bazës është baras me 1, sepse $b^1=b \Rightarrow \log_b b=1$.

Logaritmet e disa numrave për bazën e dhënë mund të njehsohen drejtpërdrejt në bazë të përkufizimit përkatës, për shembull:

$$\log_2 4=2,\ \text{sepse}\ 2^x=4;$$

$$\log_2 16=4,\ \text{sepse}\ 2^4=16;$$

$$\log_{\frac{5}{7}}\frac{25}{49}=2,\ \text{sepse}\ \left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{25}{49}.$$

Në raste më të ndërlikuara, për të njehsuar logaritmin mund të shfrytëzohet ekuacioni përkatës eksponencial.

Kështu, logaritmit $\log_8 \frac{1}{4}=x$ i përgjigjet ekuacioni eksponencial:

$$8^x=\frac{1}{4} \Rightarrow 2^{3x}=2^{-2} \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}.$$

Pra, $\log_8 \frac{1}{4}=-\frac{2}{3}$, sepse $8^{-2/3}=\frac{1}{8^{2/3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{4}$.

Në rastin e përgjithshëm, logaritmi nuk mund të gjendet në mënyrën e treguar elementare. Kështu, p.sh. $\log_2 3=x$ nuk mund të gjendet nga ekuacioni eksponencial përkatës:

$$2^x=3,$$

sepse anët e këtij barazimi nuk mund të shprehen si fuqi të bazave të barabarta.

Por, ekzistojnë metoda të ndryshme aritmetike dhe grafike për caktimin e vlerave të përafërta e panjohurës x nga ekuacioni i fundit, pra edhe vlerave të përafërta të $\log_2 3$.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet të vihet kujdes dhe si mund të plotësoi mangësitë në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë që të arrij rezultatet e të nxënit.

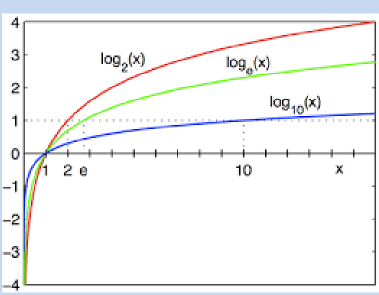
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **2. FUNKSIONET LOGARITMIKE**

Njësia mësimore: **2.2**. Pëkufizimi dhe vetitë e funksionit logaritmik

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 2. FUNKSIONET LOGARITMIKE

</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm;
2. Shpreh logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas;
3. Zbaton vetitë e logaritmit për zgjidhje të detyrave të ndryshme;
4. Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo e;
5. Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilit do numër real;
6. Zgjidh ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike;
7. Paraqet grafikisht funksione të ndryshme logaritmike;
8. Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme;
9. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione</td></tr>
</table>

	logaritmike
Njësia mësimore: 1.2. Pëkufizimi dhe vetitë e funksionit logaritmik	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon funksionin logaritmik dhe interpreton vetit e tij.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (anasjell) (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për vetit e funksionit logaritmik.

Fjalët kyçe: funksion logaritmik, grafik

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

2. Të përkufizoni funksionin logaritmik dhe interpretoni vetit e tij.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoi funksionin logaritmik dhe të përvetësoi vetit e tij.

Mësimdhënësi shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet eksponent?
2. Si e kuptoni termin logaritëm?
3. Le të shënohet në tabelë *"logaritmi i x për bazën b"*.? Rez. $\log_b x$?
4. Të shënohet në tabelë $y = \log_b x$.

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi,shënon në tabelë:

2. Pëkufizimi dhe vetitë e funksionit logaritmik

Mësimdhënësi, fillimisht merr:

Përkufizimi i funksionit logaritmik:

Funksioni i trajtës $y = \log_b x$ (që sipas përkufizimit më sipërm është ekuivalent me $x = b^y$), ku $b > 0$ dhe $b \neq 1$, quhet **funksion logaritmik.**

Në kapitullin 5 shqyrtuam funksionin eksponencial f të përkufizuar me $f(x) = b^x$, për $b > 0$ dhe $b \neq 1$, i cili ishte funksion bijektiv (pra, një–një dhe mbi), për të cilin ekziston funksioni invers i tij. Mirëpo, edhe kur jemi të sigurtë se ekziston funksioni invers, gjithnjë nuk është leht gjetja e tij, sikur te funksioni lineare. Kështu, p. sh. në problemin 4 nga kapitulli 5, të funksioni eksponencial $N = 2^t$, mund të shtrohet pyetja e gjetjes së kohës t, kur numri i qelizave N është dhënë më parë. Në këtë rast funksioni invers nuk mund të gjendet me veprimet e zakonshme: mbledhje, zbritje, pjesëtim, shumëzim, fuqizim, etj. Por duhet futur veprimi i ri – logaritmi.

Teorema 1. Për $b > 1$, funksioni logaritmik $y = \log_b x$ është rritës.

Shënimi i shkurtër i kësaj teoreme është: $b > 1 \wedge x_2 > x_1 > 0 \Rightarrow \log_b x_2 > \log_b x_1$.

Vërtetimi. Le të jetë $\log_b x_1 = y_1$ dhe $\log_b x_2 = y_2$. Sipas përkufizimit të logaritmit, formulat ekuivalente me funksionet e mësipërme janë: $b^{y_1} = x_1$ dhe $b^{y_2} = x_2$.

Kemi parë se funksioni eksponencial është rritës për $b > 1$. Prandaj:

nëse është $y_2 > y_1$, atëherë $b^{y_2} > b^{y_1}$, prej nga marrim $x_2 > x_1$.

Grafiku i funksionit logaritmik konstruktohet lehtë me ndihmën e funksionit eksponencial, si funksion invers i tij. Pra, në vend të $y=\log_b x$, shkruajmë $x=b^y$. Nëse zëvendësojmë shkronjat x dhe y me y dhe x, marrim $y=b^x$. Gjeometrikisht, grafikët e funksioneve $x=b^y$ dhe $y=b^x$ janë simetrike ndaj drejtëzës $y=x$, fig.2.1 që paraqet simetralen e kuadrantit të I dhe III. D.m.th.

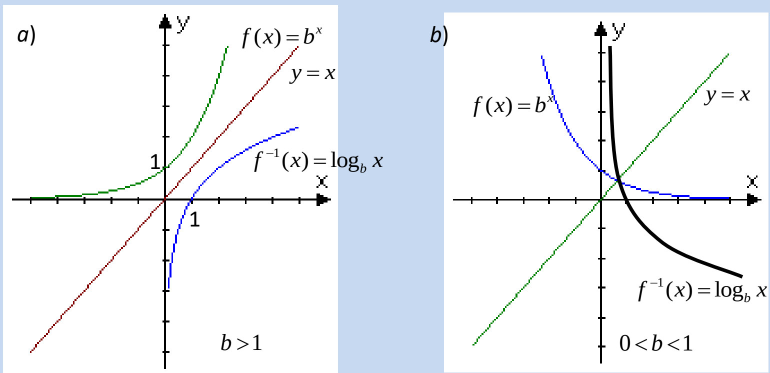


Fig. 2. 1

Nga grafiku në fig.6.1 shohim se funksioni logaritmik ka:

1. domenin = $\{x:\ x>0\}$
2. kodomenen = $\{y:\ y\in R\}$.

Vetitë e funksionit logaritmik:

1^0 Meqë $b^1=b$, atëherë $\log_b b=1$.

2^0 Meqë $b^0=1$, atëherë $\log_b 1=0$.

3^0 Meqë $x=b^y$ është ekuivalent me $y=\log_b x$, atëherë $b^{\log_b x}=x$.

4^0 Meqë $\log_b y=x$, $y=b^x$, atëherë $\log_b b^x=x$.

Shembulli 1.

a. $\log_3 3=1$ — vetia 1^0.

b. $\log_{1/2} 1=0$ — vetia 2^0.

c. $5^{\log_5 9}=9$ — vetia 3^0.

d. $\log_6 6^7=7$ — vetia 4^0.

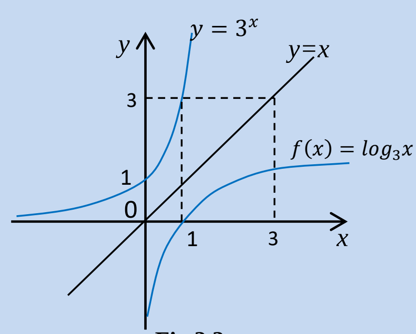


Fig.2.2.

Shembulli 2.

Të skicohet grafiku i funksionit: $f(x)=\log_3 x$.

Zgjidhja. Fillimisht kon-struktojmë grafikun e funksionit $y=3^x$. Meqë funksionet $g(x)=3^x$ dhe $f(x)=\log_3 x$ janë funksione reciprokisht inverse, grafikët e tyre janë simetrike ndaj drejtëzës $y=x$, fig.2.2.

Shembulli 3.

Të skicohet grafiku i funksionit: $f(x) = \log_2 x$.

Zgjidhja. Fig 2.3.

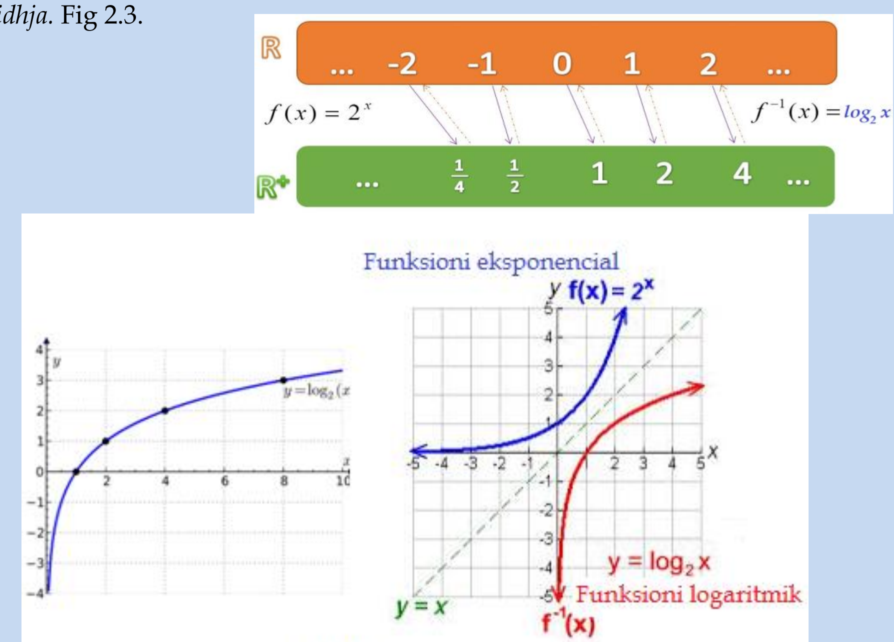
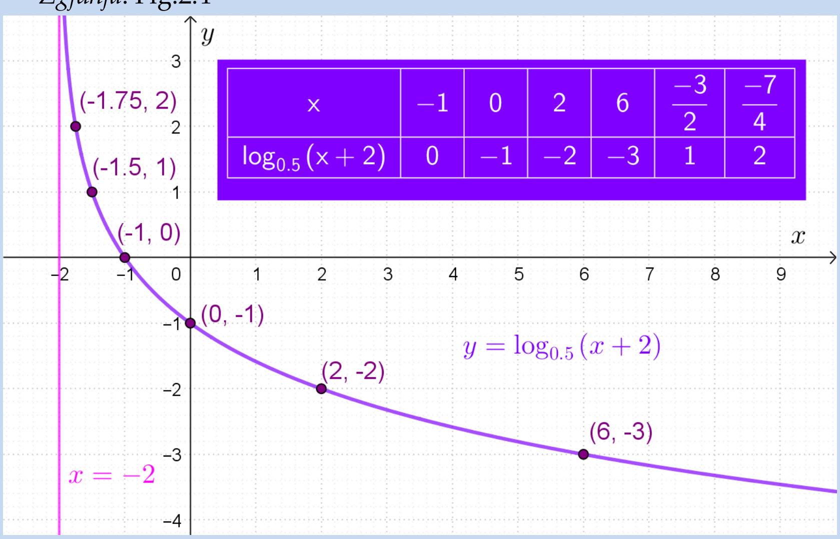


Fig.2.3

Shembulli 4.

Të skicohet grafiku i funksionit: $f(x) = \log_{0.5}(x+2)$.

Zgjdhja: Fig.2.4



x	-1	0	2	6	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-7}{4}$
$\log_{0.5}(x+2)$	0	-1	-2	-3	1	2

Fig,2.4

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli. Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Vlerësimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se funksioni logaritmik e ka të panjohurën nën logaritëm, me përvetësimin e vetive të logaritmeve funksioni mund të paraqitet e grafikisht dhe ka mundësi të zbatohet në zgjidhje të problemeve(lexo librin e nxënësit). Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bën vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen e kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **2. FUNKSIONET LLOGARITMIKE**
Njësia mësimore: **2**.3. Rregullat e logaritmit

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 2. FUNKSIONET LOGARITMIK

Vetitë e logaritmeve
1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a x^n = n\log_a x$
6. $\log_{a^s} x = \frac{1}{s}\log_a x$
7. $\log_a b \cdot \log_b a = 1 \quad tj. \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$
8. Kalimi në një bazë të re c: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $a^{\log_a b} = b$</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm;
2. Shpreh logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas;
3. Zbaton vetitë e logaritmit për zgjidhje të detyrave të ndryshme;
4. Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo e;
5. Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilit do numër real;
6. Zgjidh ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike;
7. Paraqet grafikisht funksione të ndryshme logaritmike;
8. Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme;
9. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione logaritmike</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
2.3. Rregullat e logaritmit</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përvetëson rregullat e logaritmeve
2. Zbaton rregullat e logaritmeve në kontekste të veprimeve me logaritme dhe në situata problemore</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato</td></tr>
</table>

logaritmike;

5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për rregullat (vetitë) të logaritmeve.

Fjalët kyçe: rregulla, logaritme

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përvetësoni rregullat e logaritmeve
2. Të zbatoni rregullat e logaritmeve në kontekste të veprimeve me logaritme dhe në situata problemore

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi rregullat e logaritmeve dhe t`i zbatoi ato në situata problemore.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet ekuacion eksponencial
2. Çka quhet funksion logaritmik?
3. Të shënohen në tabelë vetitë e funksioneve logaritmike?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi, shënon në tabelë:

3. Rregullat e logaritmimit

Duke u mbështetur në përkufizimin e logaritmit dhe disa vetive të funksionit eksponencial, paraqesim pohimet e mëposhtme.

Teorema 2. *Nëse është dhënë* $b>0$, $b\neq 1$ *dhe* x *e* y *janë numra realë pozitivë, atëherë vlen barazimi:*

$$\log_b(xy)=\log_b x+\log_b y\,.$$

Pra, *logaritmi i prodhimit të dy apo më shumë numrave realë pozitivë është i barabartë me shumën e logaritmeve të atyre numrave për të njëjtën bazë.*

Vërtetimi: Vërtetimin do ta bëjmë për prodhimin e dy numrave. Më tutje ky vërtetim mund të përgjithësohet edhe për prodhimin e më shumë numrave.

Le të jetë $\log_b x=m$ dhe $\log_b y=n$. Atëherë:

$$b^m=x \quad \text{dhe} \quad b^n=y\,.$$

Duke shumëzuar dy barazimet e fundit anëpëranë marrim:

$$x\cdot y=b^m\cdot b^n=b^{m+n} \qquad \text{vetia e eksponentëve}$$

Në bazë të përkufizimit të logaritmit mund të shkruajmë:

$xy=b^{m+n}$ është ekuivalent me $\log_b(xy)=m+n$.

Duke zëvendësuar m me $\log_b x$ dhe n me $\log_b y$, fitojmë:

$$\log_b(xy)=\log_b x+\log_b y\,.$$

Shembulli 3.

a. $\log_3(7\cdot 8)=\log_3 7+\log_3 8$.

b. $\log_5 6+\log_5 9=\log_5(6\cdot 9)=\log_5 54$.

c. $\log_2 20=\log_2(4\cdot 5)=\log_2(2\cdot 2\cdot 5)$

$=\log_2 2+\log_2 2+\log_2 5$ vetia e prodhimit

$=1+1+\log_2 5$ $\log_b b=1$

$=2+\log_2 5$.

Teorema 3. *Nëse* $b>0$, $b\neq 1$ *dhe* x *e* y *janë numra realë pozitivë, atëherë:*

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b x-\log_b y\,.$$

Pra, *logaritmi i herësit të dy numrave realë pozitivë është i barabartë me ndryshimin e logaritmeve të pjesëtueshmit dhe të pjesëtuesit për të njëjtën bazë.*

Vërtetimi merret drejtpërdrejt me zbatimin e teoremës 2. Nisemi nga barazimi:

$$\frac{x}{y}\cdot y=x\,,$$

dhe, po të zbatojmë teoremën 5 marrim: $\log_b \frac{x}{y} + \log_b y = \log_b x$

Nga barazimi i fundit marrim: $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$.

Është më rëndësi të vërehet një rast i veçantë, i cili rrjedh nga kjo teoremë dhe nga vetitë themelore të logaritmeve: $\log_b \frac{1}{x} = \log_b 1 - \log_b x = -\log_b x$.

Shembulli 4.

a. $\log_6 \left(\frac{8}{9}\right) = \log_6 8 - \log_6 9$. vetia e herësit

b. $\log_3 5 - \log_3 7 = \log_3 \left(\frac{5}{7}\right)$. vetia e herësit

c. $\log_5 \left(\frac{5}{9}\right) = \log_5 5 - \log_5 9 \quad = 1 - \log_5 9$ vetia e herësit

. $\log_b b = 1$

Teorema 4. *Nëse është* $b > 0\,(b \neq 1)$, r *numër real dhe* x *numër real pozitiv, atëherë:*

$$\log_b (x^r) = r \log_b x .$$

Pra, *logaritmi i fuqisë së numrit real pozitiv është i barabartë me prodhimin e eksponentit të asaj fuqie dhe logaritmit të atij numri real pozitiv.*

Vërtetimi. Dihet, nëse $\log_b x = y$, atëherë $x = b^y$. Nëse këtë barazim e fuqizojmë me numrin r, atëherë:

$$x^r = (b^y)^r = b^{ry} .$$

Në bazë të përkufizimit të logaritmit, nga ky barazim rrjedh:

$$\log_b (x^r) = r\, y ,$$

ose, duke pasur parasysh se $\log_b x = y$, atëherë:

$$\log_b (x^r) = r \log_b x ,$$

që vërteton pohimin e teoremës.

Shembulli 5.

a. $\log_3 2^4 = 4 \log_3 2$. vetia e fuqisë

b. $6 \log_5 2 = \log_5 (2^6)$ vetia e fuqisë

$= \log_5 64$ — 2^6 zëvendësohet me 64

c. $\log_7 (7^3) = 3\log_7 7$ — vetia e herësit

$= 3 \cdot 1.$ — $\log_7 7$ zëvendësohet me1

$= 3.$

Duke zbatuar pohimet - teoremat e mësipërme mund të llogariten vlerat e shprehjeve numerike të cilat me veprimet e njohura aritmetike nuk mund të gjenden. Këtë e ilustrojmë në shembujt vijues.

Shembulli 6. Llogaritni vlerën e x në qoftë se $x = \frac{p^2}{q^3}$.

Zgjidhja. Duke zbatuar vetitë e logaritmeve mund të shkruajmë:

$$\log_b x = \log_b \frac{p^2}{q^3}$$

$\log_b x = \log_b p^2 - \log_b q^3$ — teorema 3

$\log_b x = 2\log_b p - 3\log_b q.$ — teorema 4

Shembulli 7. Logaritmoni shprehjen $\frac{p^3 \cdot \sqrt{q}}{t^2 \cdot \sqrt[3]{s^2}}$.

Zgjidhja. Shënojmë $x = \frac{p^3 \cdot \sqrt{q}}{t^2 \cdot \sqrt[3]{s^2}}$ dhe pastaj këtë shprehje e logarit-mojmë anëperanë për bazën b. Kështu marrim:

$\log_b x = \log p^3 \sqrt{q} - \log_b t^2 \sqrt[3]{s^2}$ — teorema 3

$\log_b x = \log_b p^3 + \log_b \sqrt{q} - (\log_b t^2 + \log_b \sqrt[3]{s^2}\ )$ — teorema 2

$\log_b x = 3\log_b p + \frac{1}{2}\log_b q - 2\log_b t - \frac{2}{3}\log_b s$ — teorema 4.

Në shembujt e mësipërm treguam sesi logaritmi i shprehjes „zbërthehet" në logaritem të disa numrave të asaj shprehjeje, natyrisht sipas të njëjtës bazë b. Detyra mund të shtrohet edhe anasjelltas: duke pasur $\log_b x$, ku me x është shënuar vlera e ndonjë shprehjeje, në trajtë shume (apo edhe ndryshimi) logaritmesh të numrave të cilët formojnë atë shprehje, të shumëzuar me disa koeficientë; mund të caktojmë x në bazë të teoremave të mëparme.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të

nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave kryesisht zbatimi i rregullave drej për së drejti të llogaritmeve.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësi përvetësimin e rregullave të llogaritmeve i përvetëson duke i përdorur në secin shembull që e merr dhe gjithherë duke u thirr rregulla, të cilat në zbatimin e tyre vetvetiu i përdor këto rregulla dhe i zbaton pa ndonjë problem.

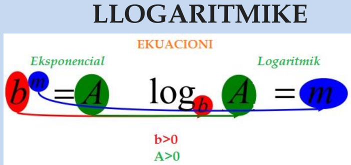
Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bën vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **2. FUNKSIONET LLOGARITMIKE**

Njësia mësimore: **2.4**. Ekuacionet logaritmike

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: **2. FUNKSIONET LLOGARITMIKE**

</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm;
2. Shpreh logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas;
3. Zbaton vetitë e logaritmit për zgjidhje të detyrave të ndryshme;</td></tr>
</table>

	4. Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo ***e;*** 5. Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilit do numër real; 6. Zgjidh ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike; 7. Paraqet grafikisht funksione të ndryshme logaritmike; 8. Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme; 9. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione logaritmike
Njësia mësimore: **2.4**. Ekuacionet logaritmike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Zgjidh ekuacionet logaritmike
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi: 1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet. 2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve; 3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike; 4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike; 5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).	
Qasja e të nxënit: Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për zgjidhjen e ekuacionet logaritmike.	
Fjalët kyçe: ekuacion logaritmik, zgjidhje	
Kriteret e suksesit: *Mësimdhënësi,* kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore 1. Të zgjidhni ekuacionet logaritmike të formave të thjeshta	
Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore: Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.	
Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore: Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.	
Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe **Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës** ***Organizimi i orës së mësimit:*** ***a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*	

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zgjidh ekuacionet logaritmike.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet ekuacion eksponencial?
2. Të shënohet një shembull i funksionit logaritmik? P.sh. $y=\log_4 x$, $y=\log_a x$
3. Të shënohet në vendin e y një konstantë ? P.sh. $2=\log_4 x$, $b=\log_a x$

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë: **Ekuacionet logaritmike**

Mësimdhënësi, **përkufizon** ekuacionin logaritmik:

Ekuacion tek i cili e panjohura figuron nën shenjën e logaritmit quhet ***ekuacion logaritmik.***

Për zgjidhjen e ekuacioneve logaritmike shfrytëzohen rregullat e logaritmimit dhe vetia:

Nëse $x>0,\ y>0$ *dhe* $\log_b x=\log_b y$, *atëherë* $x=y \quad (b>0,\ b\neq 1)$.

Shembulli 8. Të zgjidhen ekuacionet logaritmike:

a. $\log_4 64=x$.

b. $\log_{10} x=5$.

c. $\log_x 512=3$.

Zgjidhja. **a.** Sipas përkufizimit, $\log_4 64=x$ është ekuivalent me $4^x=64$. Atëherë:

$64=4^3$

$4^x=4^3$ — 64 zëvendësohet me 4^3

$x=3$. — Vetitë e ekuacionit eksponencial.

Pra, bashkësia e zgjidhjeve është bashkësia $\{3\}$.

b. Sipas përkufizimit, $\log_{10} x=5$ është ekuivalent me $10^5=x$. Atëherë:

$10^5=100000$

$x=100000$ — 10^5 zëvendësohet me 100000

Pra, bashkësia e zgjidhjeve është bashkësia $\{100000\}$.

c. Sipas përkufizimit, $\log_x 512=3$ është ekuivalent me $x^3=512$. Atëherë:

$512=8^3$

$x^3=8^3$ — 512 zëvendësohet me 8^3

$x=8$.

Pra, bashkësia e zgjidhjeve është bashkësia $\{8\}$.

Shembulli 9. Të zgjidhen ekuacionet logaritmike:

a. $\log_5(x-2)=3$.

b. $\log_2 x+\log_2(x+2)=3$.

c. $\log_b x - \log_b (x-1) = \log_b 2$.

Zgjidhja.

a. Ekuacionin e shkruajmë në trajtnën përkatëse eksponenciale:

$$x - 2 = 5^3$$
$$x - 2 = 125$$
$$x = 127.$$

b. Meqë bazat janë të njëjta, mbështetur në teoremën 4 kemi

$$\log_2 x + \log_2 (x+2) = \log_2 x(x+2)$$
$$= \log_2 (x^2 + 2x).$$

Meqë $\log_2 (x^2 + 2x) = 3$ është ekuivalent me $x^2 + 2x = 2^3$, atëherë:

$$x^2 + 2x = 8$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$(x+4)(x-2) = 0$, kemi
$$x = -4 \quad \text{ose} \quad x = 2.$$

Për $x - 4$, $\log_2 (-4+2) = \log_2 (-2)$, nuk është i përkufizuar sepse domeni duhet të jetë pozitiv. Pra, zgjidhja është bashkësia $\{2\}$.

c. $\log_b \dfrac{x}{x-1} = \log_b 2$, e nga këtu

$$\frac{x}{x-1} = 2 \Rightarrow x = 2x - 2 \Rightarrow x = 2.$$

Shembulli 10. Të njehsohet x, nëse:

a. $\log_b x = 2\log_b p + 3\log_b q$.

b. $\log_b x = \dfrac{2}{3}\log_b p - 2\log_b q - \dfrac{1}{2}\log_b t$.

Zgjidhja. **a.** Transformimet rrjedhin me këtë radhë:

$$\log_b x = \log_b p^2 + \log_b q^3 \qquad \text{teorema 4}$$
$$\log_b x = \log_b (p^2 \cdot q^3) \qquad \text{teorema 2.}$$
$$x = p^2 \cdot q^3.$$

b. $\log_b x = \log_b \sqrt[3]{p^2} - \left(\log_b q^2 + \log_b \sqrt{t}\right)$ teorema 4

$$\log_b x = \log_b \sqrt[3]{p^2} - \log_b \left(q^2 \sqrt{t}\right) \qquad \text{teorema 2}$$
$$\log_b x = \log_b \frac{\sqrt[3]{p^2}}{q^2 \sqrt{t}} \qquad \text{teorema 3}$$
$$x = \frac{\sqrt[3]{p^2}}{q^2 \sqrt{t}}.$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*
Nxënësi bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.
Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuar çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Shembuj nga libri i nxënësit . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri Përmbledhje detyrash dhe formulohen vetë dtyra në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi nga orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.
P.sh. vije në përfundim se nxënësit zgjidhin ekuacionet logaritmike. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

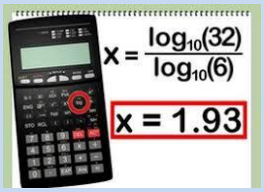
- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **2. FUNKSIONET LLOGARITMIKE**
Njësia mësimore: 5. Logaritmet dhjetore

PLANIT I ORËS MËSIMORE

Fusha kurrikulare:	Koncepti bazë i fushës:	Shkalla e kurrikulës:	Klasa:
MATEMATIKË Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	**Funksionet dhe ndryshoret**	**V-të**	**XI-të**

<table>
<tr>
<td>Tema: 2. FUNKSIONET LLOGARITMIKE

</td>
<td>Nxënësi:
1. Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm;
2. Shpreh logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas;
3. Zbaton vetitë e logaritmit për zgjidhje të detyrave të ndryshme;
4. Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo e;
5. Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilit do numër real;
6. Zgjidh ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike;
7. Paraqet grafikisht funksione të ndryshme logaritmike;
8. Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme;
9. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione logaritmike</td>
</tr>
<tr>
<td>Njësia mësimore:
2.5. Logaritmet dhjetore</td>
<td><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përvetëson logaritmet me bazë 10</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, përvetësimin e logaritmeve me bazë dhjetë..</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Fjalët kyçe:</u> logaritëm me baza dhjet</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të përvetësoni logaritmet me bazë 10.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:</u>
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.</td>
</tr>
</table>

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi logaritmet me bazë 10.
Mësimdhënësi : Shtron disa pyetje. P.sh.

2. Çka quhet llogaritëm?
3. Të shënohet vetit e logaritmeve.
4. Të merret një shembull i ekuacionit logaritmik. P.sh. $2=\log_3 x$, $b=\log_a x$
5. Të shënohet trajta e përgjithshme e funksionit logaritmik. P.sh. $y=\log_b x$

Nës e te shembulli 4. Në vend të bazës a të shënohet 10, apo shembulli 5nëvënd të bazës b të shënohet 10.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi, shënon në tabelë:

5. Logaritmet dhjetore

Mësimdhënësi, Deri më tash janë shqyrtuar logaritme të çfarëdo baze (numri pozitiv të ndryshëm nga 1). Mirëpo në teori dhe në praktikë kryesisht zbatohen dy sisteme logaritmike.

I pari është *sistemi dhjetor* (*dekad, Brigsit*) të cilin e formojnë logaritmet e të gjithë numrave pozitivë të njehsuar sipas bazës 10. Në matematikën elementare përdoren vetëm logaritmet dhjetore.

I dyti është *sistemi natyror* (*Neperit*) i cili përdoret në matematikën e lartë. Për bazë të këtij sistemi merret një numër iracional, që shënohet me shkronjën e, vlera e përafërt e të cilit është $e\approx 2{,}78182818\cdots$ (me të cilin jemi njohur edhe në kapitullin 5).

Prandaj edhe dallojmë logaritmet dhjetore dhe logaritmet natyrore:

$$y=\log_{10} x=\log x=\lg x \quad \text{dhe} \quad y=\log_e x=\ln x.$$

Lidhja ndërmjet logarimit dhjetor dhe logaritmit natyror jipet me:

$$\log x=\frac{\ln x}{\ln 10}, \text{ ku } \ln 10=2{,}302585\cdots.$$

Theksojmë se logaritmi mesin gjeometrik e këthen në mes arithmetik:

$$\log\sqrt{uv}=\frac{1}{2}(\log u+\log v),\ u,v>0.$$

Këtu do të shqyrtojmë vetëm logaritmet dhjetore, ndërsa logaritmet natyrore nuk do të shqyrtojmë për shkak të nivelit të nxënësve të cilëve iu dedikohet ky tekst.

Shqyrtimin e logaritmeve dhjetore do ta fillojmë prej logaritmeve dhjetore të numrave, të cilët mund të paraqiten si fuqi të numrit 10, me eksponent numër të plotë, d.m.th. prej fuqive:

$$10^1,\ 10^2,\ 10^3, \cdots, 10^{-1}, 10^{-2}, \cdots, 10^0.$$

Për shembull,

$\log 1000 = 3$	sepse $10^3 = 1000$
$\log 100 = 2$	sepse $10^2 = 100$
$\log 10 = 1$	sepse $10^1 = 10$
$\log 1 = 0$	sepse $10^0 = 1$
$\log 0.1 = -1$	sepse $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$
$\log 0.01 = -2$	sepse $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0.01$
$\log 0.001 = -3$	sepse $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0.001$

Vetitë themelore të logaritmeve të përmendura më parë janë të dukshme edhe në këtë rast. Mirëpo, tani mund të nxjerrim edhe disa veti të logaritmeve dhjetore:

- logaritmet e numrave që mund të shkruhen si fuqi, baza e të cilëve është 10, ndërsa eksponenti numër natyral, janë të barabartë me atë numër natyral;

- logaritmet e numrave që mund të shkruhen si fuqi, baza e të cilëve është 10, ndërsa eksponenti numër i plotë negativ, janë të barabartë me atë numër negativ;

- logaritmet e gjithë numrave të tjerë pozitivë nuk janë numra të plotë (në rastin e përgjithshëm janë numra iracionalë) dhe mund të shkruhen në trajtë $N + n$, ku N është numër i plotë dhe quhet *karakteristikë*, kurse $0 \le n < 1$ dhe quhet *mantisë*;

- logaritmet e dy numrave, që kanë shifra të barabartë dhe në radhë të njëjtë, me presë dhjetore në vende të ndryshme dallohen vetëm për një numër të plotë (p.sh.: $300 = 3 \cdot 10^2$, pra, $\log 300 = \log 3 + 2$; ose $0.0003 = 3 \cdot 10^{-4}$, pra $\log 0.0003 = \log 3 - 4$) .

Përdorimi i kalkulatorit

Logaritmi i numrave mund të gjendet edhe me kalkulator. Këtë po e ilustrojmë në disa shembuj

Shembulli 11. Me ndihmën e kalkulatorit të gjenden logaritmet e numrave:

a. $\log 724$.

Në kalkulator shkruajmë:

$\boxed{7}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{\mathit{log}}$

dhe në monitor lexojmë 2.8597386. (Këtu numri 2 është karakteristika, ndërsa numri decimal $.8597386$ mantisa e numrit të dhënë). Pra,

$$\log 724 \approx 2.8597 \qquad \text{(korrekt deri në 4 decimale).}$$

Sepse $10^{2.8597} \approx 724$.

b. $\log 715000$

$\boxed{7}\ \boxed{1}\ \boxed{5}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{0}\ \boxed{log}$

Në kalkulator shkruajmë:

dhe lexojmë në monitor: 5.854306. Duke rrumbullakuar në katër decimale kemi $\log 715000 \approx 5.8543$, sepse $10^{5.8543} \approx 715000$.

c. $\log 0.0749$. $\boxed{\bullet}\ \boxed{0}\ \boxed{7}\ \boxed{4}\ \boxed{9}\ \boxed{log}$

Në kalkulator shkruajmë:

dhe lexojmë në monitor: -1.125518. Pra, $\log 0.0749 = -1.1255$ dhe $10^{-1.1255} \approx 0.0749$

Antilogaritmimi

Supozojmë se duke logaritmuar është fituar ky rezultat: $\log x = \log p + \log q$,
ku me x është shënuar shprehja algjebrike e logaritmuar.

Njehsimi i shprehjes algjebrike x, logaritmi i së cilës është i njohur, quhet *antilogaritmim* (ose *antilog*). Kjo detyrë zgjidhet duke i zbatuar rregullat themelore të logaritmimit, por radha e zbatimit është e anasjelltë. Pra,

$$\textit{anti}\log x = N \quad \text{është ekuivalent me} \quad \log N = x .$$

Në rastin e shembullit 11b kemi se: 715000 është antilog i 5.8543,
ndërsa për shembullin 3: 0.0749 është antilog i -1.1255.

Gjetjen e antilogaritmit të numrit x me kalkulator e ilustrojmë me shembullin 12.

Shembulli 12. Duke përdorur kalkulatorin të gjenden antilogaritmet e numrave të dhënë.

a. 2.8597. **b.** -1.1255.

Zgjidhja. **a.** Shkruajmë:

$\boxed{2}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{8}\ \boxed{5}\ \boxed{9}\ \boxed{7}\ \boxed{10^x}$

$\boxed{2}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{8}\ \boxed{5}\ \boxed{9}\ \boxed{7}\ \boxed{INV}\ \boxed{10^x}$

Ose:

dhe lexojmë në monitor: 723.93571. Pra:

$$\log 724 \approx 2.8597 \text{ ose } 10^{2.8597} \approx 724 .$$

$\boxed{1}\ \boxed{\bullet}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{+/-}\ \boxed{10^x}$

b. Shkruajmë:

dhe lexojmë në monitor 0.074903135. Pra:

$$\log 0.0749 \approx -1.1255 \text{ dhe } 10^{-1.1255} \approx 0.0749.$$

Meqë kemi mësuar përdorimin e kalkulatorit, mund të zgjidhim edhe detyrat llogaritëse të cilat deri me tani nuk kemi mundur t'i zgjidhim. Mirëpo, kjo nuk do të thotë, se tani duhet zgjidhur edhe detyra të ndryshme artificialisht të komplikuara.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*
Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.
Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.
P.sh. vije në përfundim se nxënësit përdor logaritmet me bazë 10. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 2. FUNKSIONET LLOGARITMIKE
Njësia mësimore: 2. 6. Zbatime të logaritmit

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Funksionet dhe ndryshoret**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

<table>
<tr><td>Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Tema: 1. FUNKSIONET LLOGARITMIKE</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm;
2. Shpreh logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas;
3. Zbaton vetitë e logaritmit për zgjidhje të detyrave të ndryshme;
4. Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo e;
5. Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilit do numër real;
6. Zgjidh ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike;
7. Paraqet grafikisht funksione të ndryshme logaritmike;
8. Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme;
9. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione logaritmike</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
1.5. Logaritmet dhjetore</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Zbaton logaritmet për zgjidhje të problemeve</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për zbatimin e logaritmeve në zgjidhje të problemeve.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Fjalët kyçe:</u> zbatim i logaritmeve, zgjidhja e problemeve</td></tr>
<tr><td colspan="4">Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të zbatoni logaritmet në zgjidhjen e problemeve të ndryshme.</td></tr>
</table>

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi logaritmet me bazë 10.

Mësimdhënësi : Shtron disa pyetje lidhur me logaritmet duke përsëritë funksionet, vetit e funksioneve logaritmike, vetitë e logaritmeve , logaritmet me bazë 10 etj.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi jep disa shembuj ku vije në shprehje zbatimi i logaritmeve dhe problemet i zgjidh bashkërisht me nxënësit, Kjo realizohet duke shënuar një nxënës në tabelë nën përcjelljen e mësimdhënësit dhe shokëve të klasës apo duke i ndarë në grupe dhe duke i dhënë shembuj të ndryshëm dhe në pjesën e reflektimit të orës analizojnë zgjidhjen.

Mësimdhënësi, shënon në tabelë:

6. Zbatime të logaritmit

Mësimdhënësi: Zbatimi themelor i njehsimit logaritmik qëndron në njehsimin e vlerave numerike të shprehjeve.

Shembulli 13. Njehsoni vlerën e shprehjes numerike: $x=\dfrac{56{,}38\cdot 0{,}479}{1{,}356}$.

Zgjidhja. Duke logaritmuar barazimin e dhënë dhe duke aplikuar teoremat 1 dhe 2, kemi:

$$\log x=\log 56{,}38+\log 0{,}479-\log 1{,}356$$
$$=1{,}75113+1{,}68034-1{,}13226=1{,}29921.$$

Rrjedhimisht, $x=19{,}916$.

Shembulli 14. Njehsoni $\sqrt[5]{2}$.

Zgjidhja. Shënojmë rezultatin e rrënjëzimit me x dhe kemi barazimin: $x=\sqrt[5]{2}$,
ose pas logaritmimit dhe antilogaritmimit:

$$\log x=\frac{1}{5}\log 2=\frac{1}{5}\cdot 0{,}30103=0{,}06021\Rightarrow x=1{,}1487.$$

Shembulli 15. Zgjidhni ekuacionin $2^x=3$.

Zgjidhja. Pas logaritmimit të dy anëve kemi: $x\log 2=\log 3$.

Prej nga: $x = \frac{\log 3}{\log 2} = \frac{0{,}47712}{0{,}30103} = \frac{47712}{30103}$.

Meqë: $\log x = \log 47712 - \log 30103 = 4{,}67863 - 4{,}47861$

fitohet: $\log x = 0{,}200002$, apo $x = 1{,}585$.

Shembulli 16. Të njehsohet rrezja e bazës së cilindrit vëllimi i të cilit është $824{,}36\, dm^3$, ndërsa lartësia e trupit është e barabartë me diametrin e bazës.

Zgjidhja. Në bazë të kushteve të dhëna të detyrës, vëllimi njehsohet sipas formulës: $V = 2\pi r^3$

prej nga: $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Duke zëvendësuar vlerën për V dhe pastaj duke e logaritmuar, kemi:

$$\log r = \frac{1}{3}(\log 824{,}36 - \log 2 - \log \pi) = \frac{1}{3}(2{,}91612 - 0{,}30103 - 0{,}49715) = \frac{1}{3}\cdot 2{,}11794 = 0{,}70598.$$

Rrjedhimisht, rrezja e kërkuar është $r = 5{,}0813$.

Zbatimi teknik i funksionit logaritmik

Shkallët e logaritmit aplikohen zakonisht kur numrat me shkallë shumë të lartë krahasohen me numra me shkallë shumë të vogël, p.sh., kur masim intensitetin e zërit ose të tërmetit.

- Veshi i njeriut është në gjendje të dëgjoj tinguj në rangje të pabesueshme intensitetesh. Tingulli më i lartë që një person i shëndoshë mund ta dëgjojë pa dëmtuar veshin ka intensitetin 1 trilion ($10^{12} = 1{,}000{,}000{,}000{,}000$) më të madh se sa tingulli më i vogël që mund të dëgjohet. Në mënyrë që të mbulohet rangu i gjerë i intensiteteve, është përkufizuar e ashtuquajtura shkalla *decibel*:

$$D = 10\cdot\log\frac{I}{I_0},$$

ku D është niveli i zërit në decibel, I është i zërit (i matur në Ëat për metër), dhe I_0 është tingulli më i vogël i dëgjueshëm nga një person mesatar i shëndoshë.

- Ngjashëm, sizmologu i Kalifornisë *Charles Richter* (1900-1985) e ka përcaktuar shkallën e logaritmit në mënyrë që të bëjë matjen e shkallës së tërmeteve në lidhje me energjinë e liruar. Tërmeti më i fuqishëm që është regjistruar ishte mbi 100 bilion ($10^{11} = 100{,}000{,}000{,}000$) herë më i madh se energjia e liruar nga një tërmet i vogël që mezi është dëgjuar. Përsëri, në mënyrë që t'i krahasoj më lehtë tërmetet, Richter ka paraqitur të ashtuquajturën *shkalla e Richter*-it.

$$M = \frac{2}{3}\cdot\log\frac{E}{E_0}$$

ku E është energjia e liruar nga tërmeti (e matur në xhaul) dhe E_0 energjia e liruar nga një tërmet referent shumë i vogël gjë që është standardizuar me

$$E_0 = 10^{4.40} \text{ xhaul (Joules).}$$

Shembulli 17. Tërmeti i vitit 1906 në San Francisko ka liruar afërsisht 5.96×10^{16} xhaul energji. Duke përdorur formulën e mësipërme, merret:

$$M=\frac{2}{3}\log\frac{5.96\cdot 10^{16}}{10^{4.4}}=\frac{2}{3}\log(5.96\cdot 10^{11.6})=\frac{2}{3}\log(5.96-11.6)=\frac{2}{3}(0.775+11.6)=8.25\,.$$

Kjo do të thotë se tërmeti në San Francisko ka pas shkallën prej 8.25 të shkallës së Rihter-it.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit zbatojnë logaritmet në zgjidhje të problemeve. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 2. FUNKSIONET LOGARITMIKE

Njësia mësimore: 2.6. Inekuacionet logaritmike

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Funksionet dhe ndryshoret</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: **2. FUNKSIONET EKSPONENCIALE**</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Kupton logaritmin si tregues i bazës për të cilin fitohet shprehja nën logaritëm;
2. Shpreh logaritmin si barazim eksponencial dhe anasjelltas;
3. Zbaton vetitë e logaritmit për zgjidhje të detyrave të ndryshme;
4. Dallon logaritmet dhjetore dhe natyrale varësisht nga baza 10 apo ***e;***
5. Zbaton logaritmin për njehsimin e rrënjës të cilit do numër real;
6. Zgjidh ekuacionet dhe inekuacionet logaritmike;
7. Paraqet grafikisht funksione të ndryshme logaritmike;
8. Zbaton logaritmet për zgjidhjen e problemeve të ndryshme;
1. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme me funksione logaritmike</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
2.6. Inekuacionet logaritmike</td><td colspan="3">**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:**
1. Zgjidh inekuacionet logaritmike</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:**
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kupton konceptin e funksionit eksponencial dhe logaritmik dhe përdorë simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionet eksponenciale dhe logaritmike përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve eksponenciale, si dhe logaritmike;
4. Zgjidhë probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione eksponenciale, si dhe ato logaritmike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet inverse (për funksione eksponenciale dhe funksione logaritmike).</td></tr>
</table>

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për vetit e funksionit logaritmik.

Fjalët kyçe: inekuacion logaritmik, zgjidhje

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të zgjidhni inekuacionet logaritmike të formave të thjeshta

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zgjidh inekuacionet inekuacionet logaritmike.
Shtron disa pyetje. P.sh.

2. Çka quhet ekuacion inekuacionet logaritmike ?
3. Të shënohet në tabelë forma e përgjithshme e ekuacionit logaritmike? P.sh. $\log_a x = b$
4. Të shënohet në vendin = njëri nga shenjat > ose < ? P.sh. $\log_a x > b$ *apo* $\log_a x < b$

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënës, shenon në tabelë: **Inekuacionet logaritmike**

Mësimdhënësi, p**ërkufizon** inekuacionin logaritmik dhe shënon në tabelë:

7. Inekuacionet logaritmike

Përkufizimi i inekuacionit logaritmik:

Inekuacionet e trajtës:

1^0 $\log_b p(x) \geq a$ *ose* $\log_b p(x) \leq a$

2^0 $\log_{q(x)} M \geq a$ *ose* $\log_{q(x)} M \leq a$

(ku $b > 0,\ b \neq 1,\ p(x) > 0,\ q(x) > 0,\ q(x) \neq 1$ *dhe* $M > 0$*)* *quhen* ***inekuacione logaritmike.***

Zgjidhja e inekuacionit logaritmik $\log_b p(x) \geq a$ varet nga baza b. Dallojmë rastet:

për $b > 1$ kemi $p(x) \geq 0$ dhe $p(x) \geq a^b$;

për $0 < b < 1$ kemi $p(x) > 0$ dhe $p(x) \leq a^b$.

Këtu duhet pasur kujdes se zgjidhja kërkohet vetëm për ato vlera të x për të cilat vlera $p(x) > 0$.

Shembulli 18. Të zgjidhet inekuacioni: $\log_3(2-x) \geq 2$.

Zgjidhja. Nga përkufizimi i logaritmit kemi

$$\log_3(2-x) \geq 2 \Rightarrow 2-x \geq 3^2 \Rightarrow x \leq -7.$$

Po ashtu duhet të plotësohet kushti $p(x) > 0 \Rightarrow 2-x > 0 \Rightarrow x < 2$. Andaj, zgjidhja përfundimtare e inekuacionit të dhënë është zgjidhja e përbashkët e $x \leq 7$ dhe $x < 2$. Pra, $x \in (-\infty, -7)$.

Tani po shqyrtojmë inekuacionet logaritmike të trajtës:

$$\log_b f(x) > \log_b g(x), \quad (b > 0,\ b \neq 1).$$

1^0 Për bazën $b > 1$ kemi $\log_b f(x) > \log_b g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

2^0 Për bazën $0 < b < 1$ kemi $\log_b f(x) > \log_b g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x). \end{cases}$

Shembulli 19. Të zgjidhen inekuacionet:

a. $\log_4(x+2) \geq \log_4 x^2$.

b. $\log_{\frac{1}{3}}(2x+6) > \log_{\frac{1}{3}}(x+8)$.

. *Zgjidhja.* **a.** Meqë baza $b = 4 > 1$ kemi rastin 1^0 d.m.th. $g(x) > 0$ $(x^2 > 0)$ dhe $f(x) > g(x) > 0$ $(x+2 \geq x^2)$.

Për $x^2 > 0$ vlen për çdo $x \neq 0$, pra $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, dhe

Për $x+2 \geq x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$, pra $x \in [-1, 2]$.

Zgjidhja e përbashkët e $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ dhe $x \in [-1, 2]$ është $x \in [-1, 0) \cup (0, 2]$.

b. Meqë baza $b = \frac{1}{3}$ d.m.th. $0 < \frac{1}{3} < 1$, kemi:

$2x + 6 > 0 \quad \wedge \quad 2x + 6 < x + 8$

$2x > 6 \quad \wedge \quad x < 2$

$x > -3$. Pra, $x \in (-3, 2)$.

Tani mbetet për shqyrtim inekuacioni i trajtës:

$$\log_{g(x)} f(x) \geq a$$

zgjidhja e të cilit mbështetet tek zgjidhja e dy sistemeve të inekuacioneve:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) > 1 \\ f(x) \geq [g(x)]^a \end{array}\right\} \quad \text{dhe} \quad \left\{\begin{array}{l} 0 < g(x) < 1 \\ 0 \leq f(x) \leq [g(x)]^a \end{array}\right.$$

Dhe inekuacioni i trajtës:

$$\log_{g(x)} f(x) \geq \log_{g(x)} h(x)$$

zgjidhja e të cilit mbështetet në zgjidhjen e sistemeve të inekuacioneve:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) > 1 \\ f(x) \geq h(x) \\ h(x) > 0 \end{array}\right\} \quad \text{dhe} \quad \left\{\begin{array}{l} 0 < g(x) < 1 \\ f(x) \leq h(x) \\ f(x) > 0. \end{array}\right.$$

Shembulli 20. Të zgjidhet inekuacioni: $\log_{(x-2)}(x+1) \geq 1$.

Zgjidhja. Zgjidhim sistemet:

$$\left.\begin{array}{l} x-2 > 1 \\ x+1 \geq (x-2)^1 \end{array}\right\} \quad \text{dhe} \quad \left\{\begin{array}{l} 0 < x-2 < 1 \\ 0 < x+1 \leq (x-2)^1 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} x > 3 \\ 1 \geq -2 \end{array}\right\} \quad \text{dhe} \quad \left\{\begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ - < x \;\; dhe\; 3 < 0. \end{array}\right.$$

Andaj, kemi:

$$x \in (3,+\infty) \cup \varnothing \quad \text{rrjdhimisht} \quad x \in (3,+\infty).$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit zgjidhin inekuacionet *logaritmike*. Në këtë mënyrë nxënësit i

arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por që të ketë ka një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

KAPITULLI **3. TIGONOMETRIA**

Tema: 3. **1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**

Njësia mësimore: 3.1.1. Njësitë për matjen e këndit

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 3. HYRJE NË TRIGONOMETRI

$1^\circ = \frac{\pi}{180} rad = 0.017\ rad$ dhe
$1 rad = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 45''$</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi:
1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë;
2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë;
3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas;
4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi;
5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate;
6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 3. 1.1. Njësitë për matjen e këndit</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përkufizon njësitë për matjen e këndit
2. Përkufizon rrethin e orientuar</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi
1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për njësit e matjes së këndit, për këndin dhe rrethin e orientuar.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Fjalët kyçe:</u> shkallë, radian, orientim</td></tr>
</table>

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të përkufizoni njësit për matjen e këndit (gradën dhe radianin);
2. Të përkufizoni rrethin e orientuar.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:
a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*
Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi njësitë për matjen e këndit, kalimi prej një njësie në njësinë tjetër. Të përkufizojnë këndin dhe rrethin e orientuar.
Shtron disa pyetje. P.sh.
1. Çka do të thotë me matë?
2. Çka quhet këndë ?
3. Çka quhet rreth ?
4. Si bëhet orientimi (pozitiv, negativ)
5. Cilët janë njësit për matjen e këndit

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe uke i argumentuar në tabelë
b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***
Mësimdhënësi shënon në tabelë:

1. Njësitë për matjen e këndit

Mësimdhënësi përkufizon:
Njësitë matëse janë madhësi të caktuara, të pranuara me marrëveshje që shprehin në mënyrë sasiore madhësi të tjera të së njëjtës natyrë.

Njësia për matjen e këndeve është *shkalla këndore* ($^{\circ}$)

$$1^{0}=\frac{1}{360} \text{ pjesë e këndit të plotë}$$

(Këndi i plotë është këndi që e formon vija e plotë rrethore). Shkalla ndahet në 60 pjesë të barabarta,

$\frac{1}{60}$ pjesë e shkallës quhet *minutë* (`). Çdo minutë ndahet në 60 pjesë, $\frac{1}{60}$ pjesë e minuetit quhet *sekondë* (``).

P.sh. këndi që i ka 35 shkallë, 23 minuta e 18 sekonda shënohet: $35^0 23' 18''$.

Në praktikë si mjet për matjen e këndit përdoret *këndmatësi* (*raportori*). Po ashtu njësia tjetër që përdoret për matjen e këndit, *quhet radian.*

Përkufizimi 1. *Radiani quhet këndi i kufizuar nga dy rreze të një rrethi nëse gjatësia e harkut në mes tyre është e barabartë gjatësinë e rrezes.*

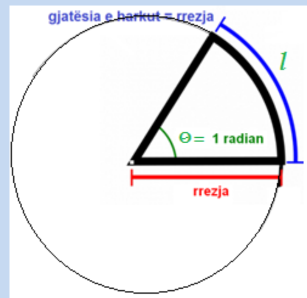


Fig.3.1

Pra: θ = 1 rad, (fig.3.1) Meqë këndit θ i përgjigjet harku rrethor $l = AB$, këndit të plotë 360^0 i përgjigjet perimetri i rrethit $2r\pi$, prandaj:

$\frac{\theta}{360^0} = \frac{l}{2r\pi}$, përkatësisht $\frac{\theta}{360^0} = \frac{r}{2r\pi} = \frac{1}{2\pi}$.

Nga ky barazim përfundimisht marrim $\theta = \frac{180^0}{\pi}$. Meqë 180^0 dhe π janë madhësi konstante, rrjedh se edhe herësi i tyre është madhësi konstante.

Masa në radian e një këndi është e barabartë me raportin ndërmjet gjatësisë së harkut që pret këndi në një rreth me qendër në kulmin e tij me rrezen e rrethit të tillë $\alpha = \frac{l}{r}$.

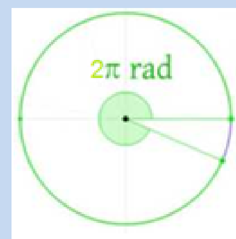


Fig.3.2

Për kalim nga një sistem i matjes në sistemin tjetër të matjes, nisemi nga relacioni që ekziston ndërmjet shkallës dhe radianit. Pra: $360^0 = 2\pi$ rad,Fig 3.2., prej nga rrjedh se:

$$1^0 = \frac{\pi}{180^0} rad = 0{,}017453 rad$$

Nëse me α shënojmë masën e një këndi në shkallë dhe x masën e një këndi në radian, kemi:

$$\alpha = \frac{180^0}{\pi} x \quad \text{dhe} \quad x = \frac{\pi}{180^0} \alpha$$

Shembulli 1. Meqë $1^0 = \frac{\pi}{180^0}$, sa është 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 150^0, 270^0, 300^0, 330^0.

Zgjidhja. Kemi: $30^0 = \frac{\pi}{180^0} \cdot 30 = \frac{\pi}{6} rad$.

Ngjashëm, $45^0 = \frac{\pi}{4} rad$, $60^0 = \frac{\pi}{3} rad$, $90^0 = \frac{\pi}{2} rad$, $150^0 = \frac{5\pi}{6} rad$, $270^0 = \frac{3\pi}{2} rad$, $300^0 = \frac{5\pi}{3} rad$, $330^0 = \frac{11\pi}{6} rad$.

Shembulli 2. Meqë $1\ rad = \left(\frac{180^0}{\pi}\right)^0$, sa është: $\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}, \frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{10}$.

Zgjidhja. Kemi: $\frac{\pi}{5}\ rad = \frac{180^0}{\pi}\cdot\frac{\pi}{5} = 36^0$ ose $\frac{\pi}{5}\ rad = \left(\frac{\pi}{5\cdot 0{,}017453}\right)^0 = 36^0$.

Ngjashëm,

$\frac{3\pi}{4} = 135^0$, $\pi = 180^0$, $\frac{5\pi}{3} = 300^0$, $\frac{5\pi}{2} = 450^0$, $\frac{\pi}{12} = 15^0$, $\frac{3\pi}{10} = 135^0$.

Përkufizimi 1. *Rrethi në të cilën është caktuar kahu i lëvizjes së pikës M, quhet **rreth i orientuar**.*
Pika M mund të përshkruajë shumë harqe rrethore pozitive apo negative me pikën fillestare M dhe atë përfundimtare N. Të gjitha këto harqe përfshihen me formulën:

$$MN + k\cdot 360^0 \quad \text{ose} \quad MN + k\cdot 2\pi,$$

ku k është numri i rrotullimeve të plota në kahun pozitiv apo negativ, ndërsa MN është harku i dhënë pozitiv. Për këtë arsye, në bazë të asaj që është thënë mbi matjen e këndit, numrat e masës së të gjitha këndeve, përfshihen me formulat: $\alpha + k\cdot 360^0$ ose $x + k\cdot 2\pi$ ku α është numri i shkallëve, ndërsa x numri i radianëve dhe $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

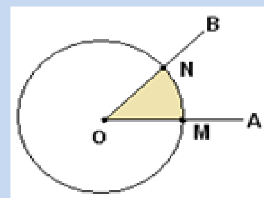


Fig.3.3

Këndet e përgjithësuara në këtë mënyrë quhen *kënde trigonometrike*. Këto kënde mund të marrin vlera të çfarëdoshme nga $-\infty$ gjer në $+\infty$, Fig.3.3.

Shembulli 7. Të përgjithësohen këndet:

a) $\angle(OA, OB) = 855^0$;

b) $\angle(OA, OB) = -765^0$.

Zgjidhja. *a*) Këndi i dhënë mund të shprehet:

$$\angle(OA, OB) = 135^0 + 2\cdot 360^0, \text{ ku } \alpha = 135^0.$$

Apo shprehur në radian: $\angle(OA, OB) = \frac{3\pi}{4} + 2\cdot 2\pi\ rad$, ku $x = \frac{3\pi}{4}$.

b) $\angle(OA, OB) = -45^0 - 2\cdot 360^0$ ku $\alpha = -45^0$ ose: $\angle(OA, OB) = -\frac{\pi}{4} - 2\cdot 2\pi$ rad, ku $x = -\frac{\pi}{4}$.

c. *Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura* *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

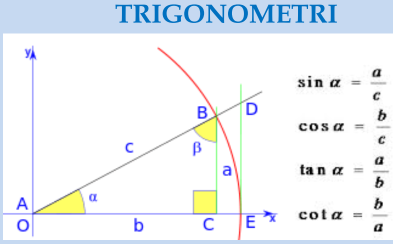
Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.
Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo*

nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.
Reflektimi i orës mësimore: Pas orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi mungesën në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se njësia për matjen e këndit janë shkalla dhe radiani, kalimin nga një njësi në një njësi tjetër. Të përvetësoi këndin dhe rrethin e orientuar. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**

Njësia mësimore: **3.1.2. Përkufizimet e funksioneve trigonometrike**

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **3. HYRJE NË TRIGONOMETRI** 	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë; 2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë; 3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas; 4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi; 5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate;		

	6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike
Njësia mësimore: 3.2. Përkufizimet e funksioneve trigonometrike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon funksionin sinus, kosinus, tangjent dhe kotangjente.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Zgjidh probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione trigonometrike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizimin e funksionet trigonometrike sinus, kosinus, tangjent dhe kotangjente.

Fjalët kyçe sinus, kosinus, tangjent, kotangjente

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni funksionet trigonometrike sinus, kosinus, tangjent dhe kotangjente.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizojnë funksionet trigonometrike edhe në formën analitike.

Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Kush po e vizaton një trekëndësh kënddrejtë
2. Cilat janë elementet e trekëndëshit kënddrejtë
3. Të shkruhen raportet në mes brinjëve ?

Këto pyetje paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

2. Përkufizimet e funksioneve trigonometrike

Mësimdhënësi: është dhënë trekëndëshi kënddrejtë ABC. Shënojmë me α këndin e ngushtë të kulmit A, me β këndin e ngushtë të kulmit B, ndërsa këndi i kulmit C paraqet këndin e drejtë (90^0). Shënojmë me $a=[BC]$ brinjën e trekëndëshit përballë këndit α, ndërsa me $b=[AC]$ brinjën përballë këndit β dhe përballë këndit të drejtë brinjën $c=[AB]$. Dihet: brinjët a dhe b quhen *katete*, ndërsa brinja c quhet *hipotenuzë*, fig.3.4. Raporti i brinjëve të trekëndëshit kënddrejtë është funksion i këndit α, andaj mund të përkufizojmë:

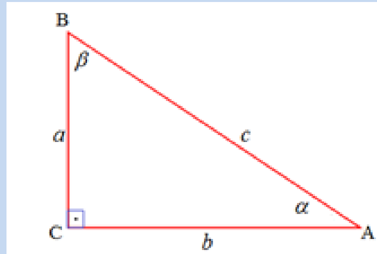


Fig.3.4

Përkufizim 1: "Sinus i këndit α (shënohet $\sin\alpha$) quhet *numri* $\frac{a}{c}$ e raportit të katetit përballë këndit α me hipotenuzën".

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Përkufizim 2: "Kosinus i këndit α (shënohet $\cos\alpha$) quhet *numri* $\frac{b}{c}$ *i* raportit e katetit të anëshkruar këndit α me hipotenuzën".

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Përkufizim 3: "Tangjent i këndit α ($tg\alpha$) quhet *numri* $\frac{a}{b}$ *i* raportit të katetit përballë këndit α me katetin anëshkruar këndit α".

$$tg\alpha = \frac{a}{b}$$

Përkufizim 4: "Kotangjente e këndit ($ctg\alpha$) quhet *numri* $\frac{b}{a}$ i raporti të katetit anëshkruar këndit α me katetin përballë këndit α".

$$ctg\alpha = \frac{b}{a}$$

Është e qartë që vlerat e $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$ dhe $ctg\,\alpha$ varen vetëm nga madhësia e këndit α.

Shembull 1: Është dhënë trekëndëshi kënddrejtë me brinje $AB=3, AC=4$ dhe $m(\measuredangle ACB)=x$, fig.3.5. Të gjenden funksionet trigonometrike sipas këndit x.

Zgjidhja. Duke zbatuar Teoremën e Pitagores gjejmë brinjën BC.

$4^2=3^2+BC^2 \Rightarrow 16=9+BC^2 \Rightarrow BC=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$. Kemi $\sin x=\frac{3}{4}$

$\cos x=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $tgx=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$ dhe $ctg\,x=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

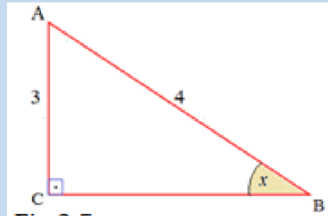


Fig.3.5

Shembull 3: Është dhënë $\sin x=\frac{2}{3}$. Të gjendet $\frac{\cos x+tg\,x}{ctg\,x}$.

Zgjidhja. Me që është dhënë $\sin x=\frac{2}{3}$ dhe se $\sin x=\frac{a}{c}$ andaj hipotenuza është $c=3$ dhe katet $a=2$.

Poashtu me zbatimin e T. Pitagorës gjejmë katetet tjetër $b=\sqrt{5}$ .Tani kemi $\cos x=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$tg\,x=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ dhe $ctg\,x=\frac{\sqrt{5}}{2}$. Vlerat e gjetura i zëvendësojmë:

$$\frac{\cos x+tg\,x}{ctg\,x}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}+\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{11\sqrt{5}}{15}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{22}{15}.$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe se sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 2 dhe 4 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se funksionet trigonometrike janë raporti në mes brinjëve të trekëndëshit kënddrejtë. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3. **1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**

Njësia mësimore**:** 3.1.3. Funksionet trigonometrike të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi:
1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë;
2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë;
3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas;
4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi;
5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate;
6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 1.3. Funksionet trigonometrike të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore</u>.
1. Njehson vlerat e funksioneve trigonometrike të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi
1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;</td></tr>
</table>

3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Zgjidh probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione trigonometrike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për njehsimin e funksioneve trigonometrike për vlera të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o .

Fjalët kyçe sinus, kosinus, tangjent, kotangjente të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të njehson vlerat e funksioneve trigonometrike të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të njehsojnë vlerat e funksioneve trigonometrike për vlera të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o .
Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Kush po e vizaton një trekëndësh barabrinjës? (një nxënës e paraqet në tabelë).
2. Kush po paraqet lartasin e lëshuar nga një kulm (një nxnës e paraqet në tabelë)
3. Sa janë vlerat e këndeve te trkëndshi barabrinjës (pret përgjigje 60^o)
4. Mbasi ndahet në dy pjesë , atëherë sa është vlera e këndeve (30^o)
5. Çfarë trekëndshi formohet nga lartës e lëshuar, dmth ndarja në dy trekëndshë (janë trekëndësha kënddrejtë më një kënd të drejtë dhe prej dy këndeve të ngusht 30^o dhe 60^o

Këto pyetje paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

a. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Funksionet trigonometrike të këndeve 30^o; 45^o dhe 60^o

Mësimdhënësi:

Ndërtojmë një trekëndësh barabrinjës dhe nga kulmi C ndërtojmë simetralen e këndit. Kjo simetrale e ndan brinjën a në dy pjesë të barabarta, fig.3.6. Mirëpo simetrale për ΔABC njëherësh është edhe lartësia e trekëndëshit, duke shfrytëzuar teoremën e Pitagorës kemi:

$$h=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

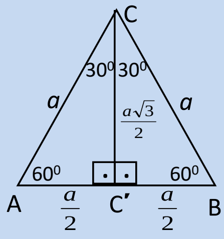


Fig. 3. 6

Marrim $\Delta ACC'$, fig.4.6. Nga përkufizimet e funksioneve trigonometrike në këtë trekëndësh kemi:

$a)$ $\sin 30^0=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2};$ $\qquad \cos 30^0=\frac{\overline{CC'}}{\overline{AC}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2};$

$\tan 30^0=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$ $\qquad \cot 30^0=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3}.$

$b)$ Ngjashëm gjejmë:

$\sin 60^0=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2};$ $\qquad \cos 60^0=\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{2};$

$\tan 60^0=\frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{3};$ $\qquad \cot 60^0=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Nga ky shembull shihet se:

$$\sin 30^0=\cos 60^0,\quad \cos 30^0=\sin 60^0,\quad \tan 30^0=\cot 60^0.$$

Ngjashëm gjejmë:

b) Në trekëndëshin kënddrejtë ABC jepen $\alpha=\beta=45^0$.

Trekëndëshi ABC është trekëndësh dybrinjënjëshëm sepse këndet në bazë janë të barabartë, pra $b=a$, fig.3.7.

Me anë të teoremës së Pitagorës gjejmë hipotenuzën c:

$$c^2=a^2+b^2=2a^2$$
$$c=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$$

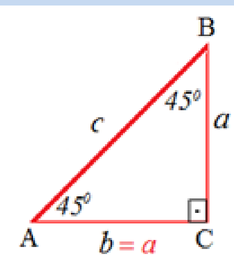


Fig.3.7

Tani gjejmë funksionet trigonometrike të këndit 45^o.

$$\sin 45^0 = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ dhe}$$

$$\cos 45^0 = \frac{b}{c} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a}{a} = 1$$

$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{a}{a} = 1$$

α	30^0	45^0	60^0
$\sin\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Përfundimet e gjetura i hedhim në tabelën e dhënë.

b. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Mësimdhënësi bashkë me nxënës njehson për 30^o, ndërsa nxnësit ngjashëm njehsojnë për 60^o dhe duke udhëzuar ata njehësojnë edhe për 45^o

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësve nga libri i klasës kanë një formë tjetër për gjetjen e vlerave që nxënësve me pakë udhëzime iu jepen dhe ata gjejnë vlerat e funksioneve trigonometrike 30^o; 45^o dhe 60^o

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se funksionet trigonometrike janë raporti në mes brinjëve të trekëndëshit kënddrejtë. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit dhe janë në gjendje të njehsojnë vlera të funksioneve trigonometrike të disa këndeve të veçanta që edhe në praktikë janë shumë të zbatueshme sa që në tabelën e paraqitur iu jepet mundësia që t`i përvetësojnë në formë memorizuese duke i përsëritur sa më shumë.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

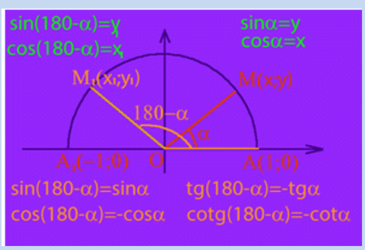
- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit

dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **3. 1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**

Njësia mësimore: 3.1.4. Funksionet trigonometrike të këndeve komplementare

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: **3. HYRJE NË TRIGONOMETRI**

</td><td colspan="3">**Rezultati i të nxënit të temës:**
Nxënësi:
1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë;
2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë;
3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas;
4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi;
5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate;
6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: **3.** 1.4.
Funksionet trigonometrike të këndeve komplementare</td><td colspan="3">**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:**
1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndeve komplementare
2. Përkufizon rrethin trigonometrik</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:**
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe</td></tr>
</table>

inekuacioneve trigonometrike;

4. Zgjidh probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione trigonometrike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizimin e funksionet trigonometrike të këndeve komplementare

Fjalët kyçe: kënd komplementar

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni funksionet trigonometrike të këndeve komplementare.
2. Të përkufizoni rrethin trigonometrik

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizojnë funksionet trigonometrike të këndeve komplementare dhe të përkufizojnë rrethin trigometrik.

Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Sa është vlera e këndeve të ngushta ? (0^o- 89^o)
2. Çka quhet kënd komplementar ? (shuma e dy këndeve të ngushta e barabrtë me 90^o quhen komplementar)

Këto pyetje paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

4. Funksionet trigonometrike të këndeve komplementare

Këndet α dhe β quhen *komplementare*, në qoftë se $\alpha+\beta=90^0$. Kështu që në trekëndëshin kënddrejtë ABC, (fig.3.8) $\beta=90^0-\alpha$.

Bazuar në përkufizim të funksioneve trigonometrike, kemi:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\cos\beta, \qquad \cos\alpha=\frac{b}{c}=\sin\beta,$$

$$tg\alpha=\frac{a}{b}=ctg\beta, \qquad ctg\,\alpha=\frac{b}{a}=tg\,\beta.$$

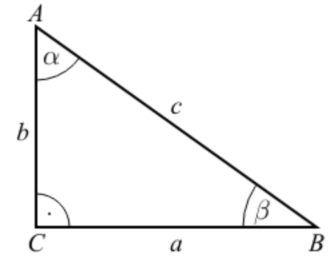


Fig.3.8

Meqë $\beta=90^0-\alpha$, atëherë:

$$\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha), \qquad \cos\alpha=\sin(90^0-\alpha)$$

$$tg\alpha=ctg(90^0-\alpha), \qquad ctg\,\alpha=tg\,(90^0-\alpha).$$

Shembulli 5: Të gjenden

a) $\sin 50^0=\cos(90^0-50)=\cos 40^0$.

b) $\tan 20^0=\cot(90^0-20^0)=\cot 70^0$

c) $\cos\frac{\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$.

Mësimdhënësi, poashtu shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet rreth trigometrik?

1.5. Rrethi trigonometrik

Për ta kuptuar më lehtë, përkufizimin e funksioneve trigonometrike dhe shumë probleme praktike të trigonometrisë përkufizojmë rrethin trigonometrik dhe rrethin numerik.

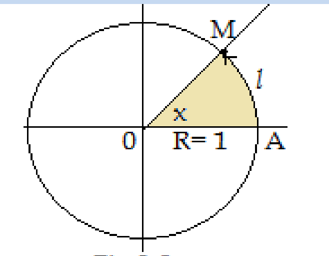


Fig.3.9

Përkufizimi 1. *Rrethi me qendër në origjinën e sistemit koordinativ, i orientuar dhe me rreze një njësi, quhet* ***rreth trigonometrik***, fig.3.9.

Nga formula e cila shpreh masën në radian të një këndi x, e dhënë më parë: $x=\frac{l}{r}$ për $r=1$, kemi $x=l$. Prej nga përfundojmë se në rrethin trigonometrik këndet qendrore të tij dhe harqet korresponduese shprehen me të njëjtën masë në radian.

b. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të

nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 2 dhe 4 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se funksionet trigonometrike janë raporti në mes brinjëve të trekëndëshit kënddrejtë. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**

Njësia mësimore: 3.1.6. Identitetet themelore trigonometrike

PLANIT I ORËS MËSIMORE

Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **3.1 HYRJE NË TRIGONOMETRI**	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë; 2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë; 3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas; 4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet		

	trigonometrike të çfarëdo këndi; 5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate; 6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike
Njësia mësimore: **3.**1.6. Identitetet themelore trigonometrike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Vërteton identitetet themelore trigonometrike

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Zgjidh probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione trigonometrike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për vërtetimin e identiteteve themelore trigonometrike

Fjalët kyçe: identitet trigonometrik

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të vërtetoni identitetet themelore trigonometrike.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të vërtetoi identitetet themelore trigonometrike.

Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet identitet ? (barazimi që ka vlerë të saktë për vlera të ndryshores quhet identitet)

Këto pyetje paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

6. *Identitetet themelore trigonometrike*

Identiteti 1.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Për të vërtetuar këtë identitet nisemi nga Teorema e Pitagorës:

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad / : c^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

Meqë $\frac{a}{c} = \sin\alpha$ dhe $\frac{b}{c} = \cos\alpha$, atëherë: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Barazimi është identitet, sepse është i saktë për çdo vlerë të α.

Për shembull:

$$\sin^2 10^0 + \cos^2 10^0 = 1,\ \sin^2 37^0 + \cos^2 37^0 = 1,\ \text{etj.}$$

Identiteti 2.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cos\alpha \neq 0\ ;\ ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \sin\alpha \neq 0.$$

Këto quhen *identitete themelore*, sepse me anë të tyre vërtetohen identitete të tjera.

Për shembull:

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1 \qquad \text{(pse ?).}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha\ ; \qquad \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha}\ ; \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Shembulli 1. Nëse $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $(0 < \alpha < 90^0)$, të gjenden vlerat e funksioneve të tjera.

Zgjidhja. Meqë është dhënë $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, nga identiteti $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ kemi:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\cos^2\alpha = 1-\frac{9}{25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Meqë: $tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$, ndërsa $ctg\,\alpha = \frac{4}{3}$.

Shembulli 2. Nëse $\tan\alpha = \frac{24}{7}$ $(0<\alpha<90^0)$, sa është $\sin\alpha$?

Zgjidhja. Meqë:

$$\left(\tan\alpha = \frac{24}{7}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{24}{7}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{576}{49}\right).$$

Pasi që $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$, atëherë:

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{576}{49} \Rightarrow 49\sin^2\alpha = 576(1-\sin^2\alpha) \Rightarrow$$

$$49\sin^2\alpha + 576\sin^2\alpha = 576 \Rightarrow 625\sin^2\alpha = 576 \Rightarrow$$

$$\sin^2\alpha = \frac{576}{625} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{24}{25}.$$

Shembulli 3. Të vërtetohet identiteti: $\frac{\sin\alpha}{1-\sin\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = 2tg^2\alpha$.

Për ndërlidhje ndërmjet funksioneve trigonometrike rol qenësor kanë *identitetet themelore trigonometrike*. Quhen themelore sepse janë të vetmet identitete të pavarura njëra nga tjetra dhe që me anë të tyre vërtetohen identitete të tjera.

Përkufizimi 1. *Barazimi, i cili lidh dy shprehje të cilat përmbajnë funksione trigonometrike dhe është i saktë për çdo vlerë të këndit, quhet* ***identitet trigonometrik****.*

Shembulli 4. Është dhënë funksioni $\sin\alpha$. Të njehsohen funksionet e tjera $\cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$.

Zgjidhja. Duke u nisur nga barazimi: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ kemi: $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha$, prej nga $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$.

Nga ana tjetër $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$ dhe $ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$.

Shenjat $\pm$ para rrënjës merret varësisht nga fakti se në cilin kuadrant gjendet këndi.

Shembulli 8. Është dhënë $tg\,\alpha$. Të njehsohen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ dhe $ctg\,\alpha$.

Zgjidhja. Nisemi nga identiteti: $\sin\alpha = \sin\alpha$ po ashtu $\sin^2\alpha = \sin^2\alpha$

dhe meqë: $\sin^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{1}$ pra $\sin^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}$.

Pasi të pjesëtojmë edhe numëruesin edhe emëruesin me $\cos^2\alpha\ (\cos^2\alpha \neq 0)$, marrim: $\sin^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

rrjedhimisht: $\sin\alpha = \pm\dfrac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$.

Ngjashëm, tregohet se $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$.

Më në fund nga relacioni: $tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1$ gjejmë $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$.

Shembulli 9. Le të jetë $tg\alpha = 2.$. Të njehsohen funksionet e tjera $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ dhe $ctg\,\alpha$.

Zgjidhja. Zëvendësojmë në formulë:

$$\sin\alpha = \pm\frac{tg\alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm\frac{2}{\sqrt{1+4}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Po ashtu:

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+4}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Dhe, në fund $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha} = \dfrac{1}{2}$.

Vërejtje. Meqë $ctg\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$ në kalkulator nuk eksiton shenja e kotangjentit, sepse ai shprehet me anën e tangjentit sipas formulës së dhënë.

Shembulli 10. Të njehsohet $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, nëse $\sin\alpha - \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Zgjidhja. Duke e ngritur në katror shprehjen:

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{4}{9}.$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuar çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 5,6,7 dhe 11 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.
Reflektimi i orës mësimore: Mësimdhënësi rjedhën e orës mësimore e bën me vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se identitet themelore quhen si të tillë ngase përmes tyre vërtetohen identitet tjera. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema**: 3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**

Njësia mësimore: 3.1.7. Përkufizimi i funksioneve trigonometrike $\sin, \cos, \tan, \cot$ të këndit të çfarëdoshëm

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë; 2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë; 3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian		

	dhe anasjelltas; 4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi; 5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate; 6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike
Njësia mësimore: 3.1.7. Përkufizimi i funksioneve trigonometrike $\sin, \cos, \tan, \cot$ të këndit të çfarëdoshëm	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon funksionet trigonometrike $\sin, \cos, \tan, \cot$ të këndit të çfarëdoshëm

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizimin e funksioneve trigonometrike të këndit të çfarëdoshëm

Fjalët kyçe: kënd i çfarëdoshëm

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizon funksionet trigonometrike $\sin, \cos, \tan, \cot$ të këndit të çfarëdoshëm

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të çfarëdoshëm trigonometrike.

Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet rreth trigonometrik?
2. Përkufizoni funksionet sins, cos, tan, cot ?
3. Të ndërtohet një rreth trigonometrik në të të ndërtohet një këndë në kuadratin e parë, të shenohet pika prerëse me rrethin.
4. Të caktohen abshisa dhe ordinata e pikës.
5. Të përkufizohen funksionet trigonometrike sipas të dhënëve në figurë.

Këto pyetje paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

7. Përkufizimi i funksioneve trigonometrike $\sin, \cos, \tan, \cot$ *të këndit të çfarëdoshëm*

Mësimdhënsi

Le të jetë R rrethi trigonometrik i orientuar me pikë fillestare A me rreze 1 dhe qendër në origjinën e sistemit koordinativ, fig.4.10. Po ashtu, le të jetë dhënë $\angle AOP = \alpha$, kënd i ngushtë qendror në këtë rreth, ashtu që $(A, P \in R)$, $A(1,0)$, $P(x, y)$. Shënojmë me t tangjenten e rrethit në pikën A. Meqë pika $P(x, y)$ i takon rrethit, shënojmë me X dhe Y projeksionet e pikës P përkatësisht në boshtin Ox dhe Oy. Është e qartë se $d(O, X) = x$ dhe $d(O, Y) = y$. Shënojmë me T pikë prerjen e drejtëzës OP me tangjenten t të rrethit. Meqë $d(O, M) = r = 1$ dhe $d(X, P) = y$ formulojmë përkufizimin në vijim.

Përkufizimi 1. Sinus *i këndit a quhet ordinata e pikës* P:

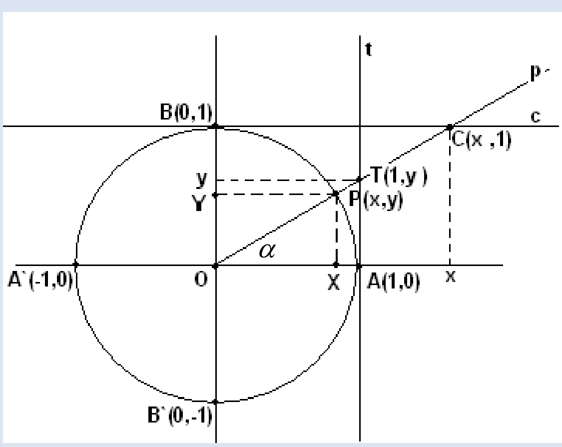


Fig.3.10

$$\sin\alpha = \frac{d(X,P)}{d(O,P)} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y\,. \qquad \ldots \qquad (1)$$

Në rrethin trigonometrik po i paraqesim vlerat e funksionit sin α në kuadrante. Shënojmë me x_1

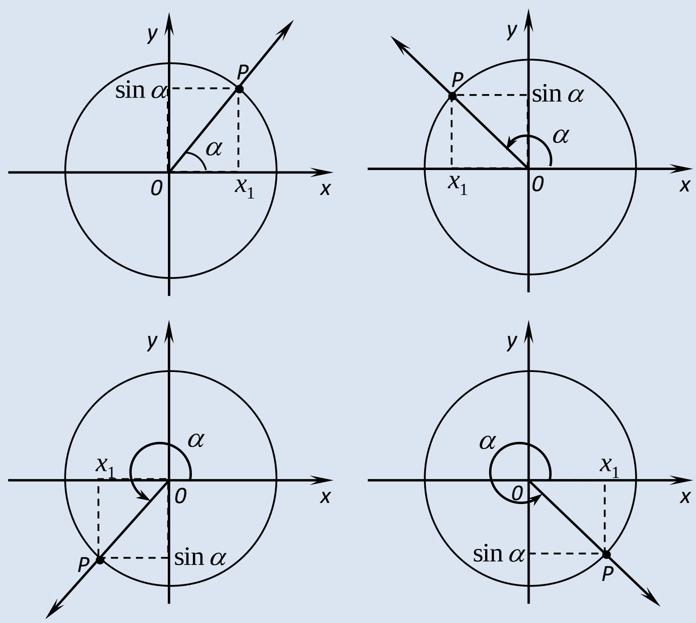


Fig.3.11

abshisën dhe $y_1 = \sin\alpha$ ordinatën e pikës P, pra $P(x_1, y_1)$, ku $-1 \le y_1 \le +1$, fig.3.11, atëherë:

$$\forall \alpha \in R, \quad -1 \le \sin\alpha \le +1 \quad \vee \quad \sin\alpha : R \to [-1,+1]$$

Ngjashëm përkufizohen edhe funksionet të tjera:

Përkufizimi 2. Kosinus *i këndit a quhet abshisa e pikës* P:

$$\cos\alpha = \frac{d(O,X)}{d(O,P)} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \ldots \qquad (2)$$

Në rrethin trigonometrik po i paraqesim vlerat e funksionit cos α në kuadrante. Shënojmë me $x_1 = \cos\alpha$ abshisën dhe y_1 ordinatën e pikës P, d.m.th. $P(x_1, y_1)$, ku $-1 \le x_1 \le +1$, fig. 3.12, atëherë:

$$\forall\alpha\in R,\quad -1\leq\cos\alpha\leq+1 \;\vee\; \cos\alpha : R\rightarrow[-1,+1]$$

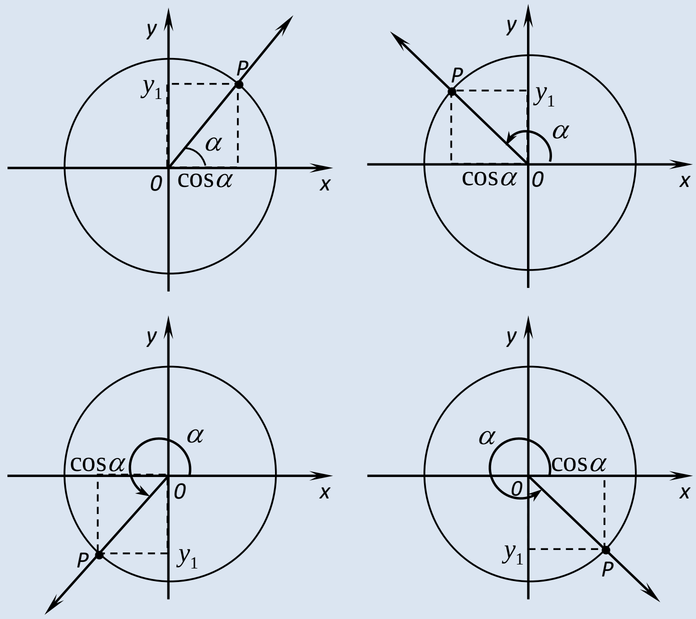


Fig.3.12

Përkufizimi 3. ***Tangjent*** *i këndit a quhet herësi i ordinatës me abshisën e pikës* Q , $(x\neq 0)$:

$$tg\alpha=\frac{d(A,Q)}{d(O,A)}=\frac{y}{x} \qquad \ldots \qquad (3)$$

Po ashtu, në rrethin trigonometrik po paraqesim vlerat e funksionit $\tan\alpha$ në kuadrante, fig.3.13, por duke pasur parasysh se tan α është i përkufizuar për:

$$\forall\alpha\in R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\},\;\; tg\alpha\in R \;\vee\; tg\alpha : R\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}\rightarrow(-\infty,+\infty).$$

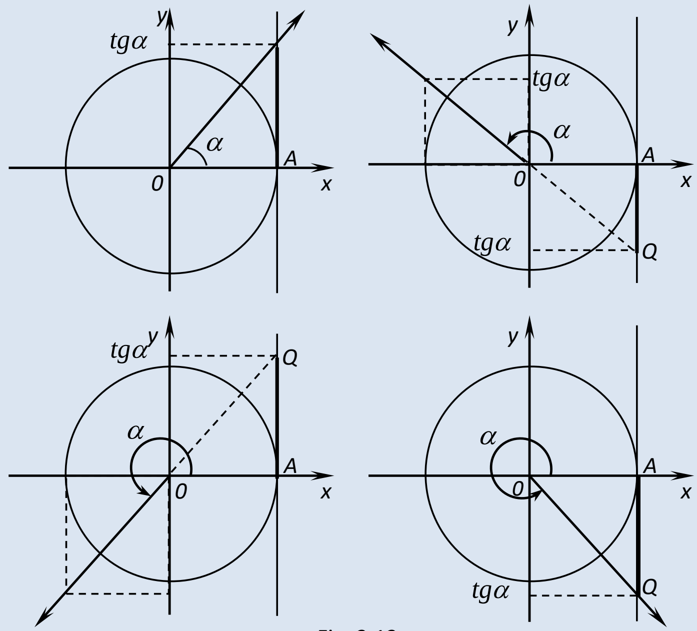


Fig. 3.13

Përkufizimi 4. Kotangjent *i këndit a quhet herësi ndërmjet abshisës dhe ordinatës së pikës* P , $(y \neq 0)$:

$$ctg\alpha = \frac{d(O,A)}{d(A,R)} = \frac{x}{y}. \qquad \ldots \quad (4)$$

Po ashtu, në rrethin trigonometrik paraqesim vlerat e funksionit cot α në kuadrante, fig.4.14, por duke pasur parasysh se cot α është i përkufizuar për:

$$\forall \alpha \in R \setminus \{k\pi\},\ ctg\alpha \in R \ \vee \ ctg\alpha : R \setminus \{k\pi\} \to (-\infty, +\infty).$$

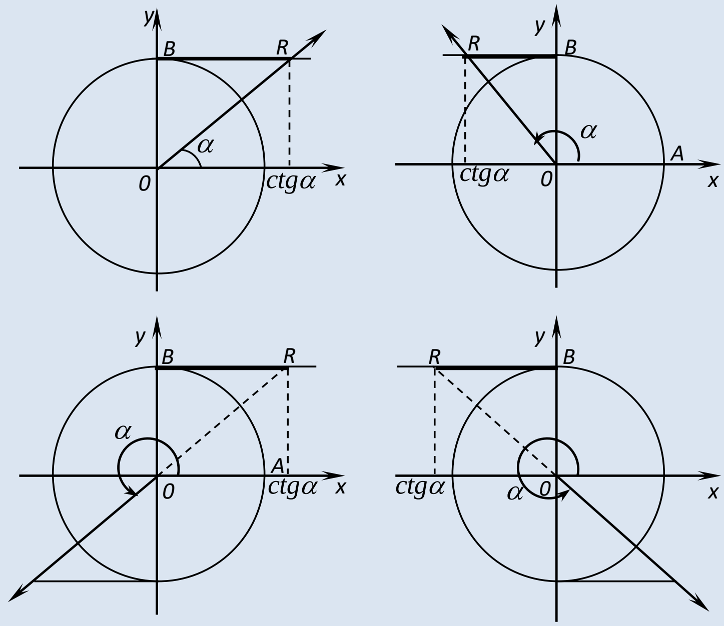


Fig. 3.14

Përkufizimet e tilla mund të paraqiten edhe në rrethin numerik.

c. *Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura* *(punë e pavarur ose në grupe)*

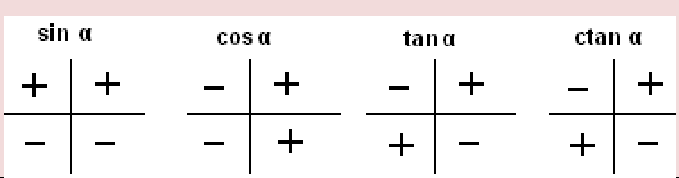
Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin, në mënyrë të pavarurdo ta plotësojnë tabelën në vazhdim, mësimdhënëi e paraqet tabelën, ndërsa nxënësit e plotësojnë në mënyrë të pavarur



Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të

veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se çdo funksion trigonometrik për çfarëdo këndi dhe mund të gjendet shenja e funksioneve në kuadrate. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3.**1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**
Njësia mësimore: 3.1.8. Disa veti të funksioneve trigonometrike

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë; 2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë; 3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas; 4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi; 5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate; 6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike		
Njësia mësimore:3.1.8. Disa veti të funksioneve trigonometrike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përcakton disa vetitë e funksioneve trigonometrike		
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:			

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përcaktimin e vetive të funksioneve trigonometrike.

Fjalët kyçe: periodë, shëndrrim, kënd i kundërt

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përcaktoni periodën, shëndrrimin në kuadratin e parë dhe këndin e kundërt të funksioneve trigonometrike.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoi disa veti të funksioneve trigonometrike.

Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Vizatoni një rreth dhe pikë prerjen e tij me boshtin x shënomë një pikë P?(Dikush nga n.x. në tabele paraqet)

2. Rrotulloni pikën P për 360^0 dhe çfarë po konstatoni?

Këto pyetje paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi:

1. *Perioda:* Le të jetë $0 \le \alpha \le 2\pi$. Atëherë numrave $\alpha,\ \alpha+2\pi,\ \alpha-2\pi$, i përgjigjen harqe të ndryeshme, fig 4.15. Por, të gjitha këta harqe kanë pikë përfundimtare M të njëjtë. Prandaj, vlen:

$$\sin\alpha = \sin(\alpha+2\pi) = \sin(\alpha-2\pi)$$

dhe $\cos\alpha = \cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha-2\pi)$.

Për këtë thuhet se funksionet *sin* dhe *cos* janë periodike me periodë 2π.

Nëse për ndonjë funksion f, i cili pasqyron ndonjë nënbashkësi A të bashkësisë R në bashkësinë R gjendet numri pozitiv T ashtu që:

$$f(x+T) = f(x)$$

për çdo $x \in A$, atëherë thuhet se funksioni f është periodikë me periodë T.

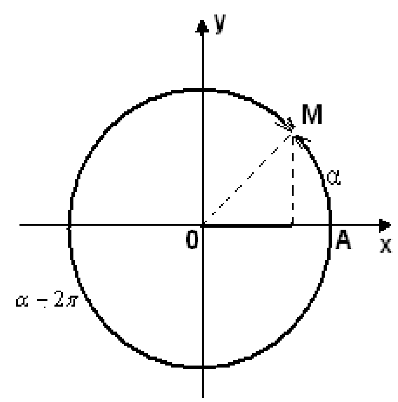


Fig. 3.15

Nga të dhëna e mësipërme rrjedh se funksionet sinus dhe cosinus kanë periodë themelore 2π, gjegjësisht perioda të përgjithshme $2k\pi$ për $(k \in Z)$. Funksionet tangjent dhe kotangjent kanë periodën themelore π, gjegjësisht perioda e përgjithshme $k\pi$, $(k \in Z)$.

Shembulli 1. Sa është vlera e $\cos\frac{23\pi}{3}$.

Zgjidhja. Meqë $\frac{25\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + 6\pi$, kemi:

$$\cos\frac{23\pi}{3} = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 6\pi\right) = \cos\frac{5\pi}{6},\ \text{ku}\ 0 \le \frac{5\pi}{3} < 2\pi.$$

Ngjashëm vlen edhe për funksionet e tjera.

Mësimdhënësi shtron pyetje: Në rrethin trigonometrik të merret çfarëdo këndi në cilindo kuadrat dhe pikën e mbarimit të këndit transformoni në kuadratin e parë?

Mësimdhënësi:

2. ***Shndërrimi në kuadrantin e parë.*** Është e mjaftueshme të dihet vlera e funksioneve trigonometrike për $0 \le \alpha \le 2\pi$, që të gjenden vlerat e funksionit për çfarëdo këndi. Madje edhe intervali $0 \le \alpha \le 2\pi$ mund të reduktohet në intervalin $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Nëse $\alpha \in R$ dhe $0 \le \alpha \le 2\pi$, atëherë ekzistojnë katër mundësi:

$$a).\ 0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2};\qquad b).\ \frac{\pi}{2} \le \alpha < \pi;\qquad c).\ \pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2};\qquad d).\ \frac{3\pi}{2} \le \alpha < 2\pi.$$

Në rastin *a)* këndi ndodhet në kaundrantin e parë dhe s'ka si reduktohet më. Për rastin *b)*, gjendet një kënd β, i tillë që $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$. Në rastin *c)*, po ashtu, ekziston këndi β, i tillë që $\alpha = \beta + \pi$. Ndërsa në rastin *d)* gjendet këndi β, i tillë që $\alpha = \beta + \frac{3\pi}{2}$. Në secilin nga rastet është $0 \le \beta \le \frac{\pi}{2}$.

Shembulli 2. Pse $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha$.

Zgjidhja. Shenja (–) del këtu pse kosinusi në kuadrantin e dytë (në intervalin $\frac{\pi}{2}<x<\pi$), merr vlera negative, ndërsa kosinusi për këndin $\alpha+\frac{\pi}{2}$ ka vlerë të barabartë me kosinusin e këndit α.

Shembulli 3. Vërtetoni se: $tg\left(\alpha+\pi\right)=tg\alpha$.

Zgjidhja. $tg(\alpha+\pi)=\frac{\sin(\alpha+\pi)}{\cos(\alpha+\pi)}=tg\alpha$. (Pse?)

Mësimdhënësi shtron pyetje: Në rrethin trigonometrik në kuadratin e parë të merret çfarëdo një këndi i ngushtë. Mandej në orientim negativ, me madhësi të njejtë sa këndi i dhënë, ndërtoni këndin negativ?

Mësimdhënësi:

***3. Funksionet trigonometrike të këndit të kundërt*.** Kërkohet të gjenden vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit të kundërt me këndin α, pra, të këndit $-\alpha$. Nëse këndit α i përgjigjet pika $M=(x,y)$ në rrethin trigonometrik, atëherë këndi $-\alpha$ i përgjigjet pika M' simetrike me pikën M ndaj boshtit x, e cila ka koordinata $M'=(x,-y)$ fig.3.16. Prandaj,

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\ \sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\ tg(-\alpha)=-tg\alpha,\ ctg(-\alpha)=-ctg\alpha.$$

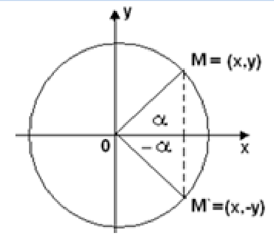


Fig.3.16

Shembulli 4. Sa është vlera e $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Zgjidhja. Pra: $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 5 të gjitha rastet .

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim çka është perioda e funksionit dhe se vije në përfundim se perioda themelore e funksionit sin dhe cos është 2π ose 360^0, ndërsa e funksioneve tg dhe ctg ka periodë π ose 180^0. Poashtu vije në përfundim se vlera e funksioneve trigonometrike të çfarëdo këndi mund të shndërrohet në kuadratin e parë por është shumë e rëndësishme se cila është shenja e funksionit: + apo -. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

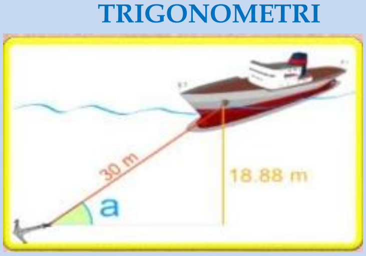
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI

Njësia mësimore: 3. 1.9. Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **3. 1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**  	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë; 2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë; 3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas; 4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi; 5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate; 6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike		

Njësia mësimore: **3**.1.9. Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë.	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Njehson elementet e trekëndëshit kundrejt. 2. Zbaton teoremën e sinusit. 3. Zbaton teoremën e kosinusit

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Zgjidh probleme që përfshijnë ekuacione dhe inekuacione trigonometrike;
5. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përcaktimin e vetive të funksioneve trigonometrike.

Fjalët kyçe: trekëndësh kënddrejtë, teoremë e sinusit, teoremë e kosinusit

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të njehsojnë elementet e trekëndëshit kënddrejtë
2. Të zbaton teoremën e sinusit.
3. Zbaton teoremën e kosinusit.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të njehsojnë elementet e trekëndëshit kënddrejtë, zotojnë teoremën e sinusit dhe zbaton teoremën e kosinusi.

Mësimdhënësi, shtron disa pyetje. P.sh.

1. Të vizatohet një trekëndësh kënddrejtë?

   Të shënohen të gjitha elementet e trekëndëshit kënddrejtë (brinjët, këndet, kulmet0.
2. Të përkufizohen funksionet trigonometrike dhe të shprehen elementet e trekëndëshin sipas funksioneve, etj.

Këto pyetje parapraakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi:

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

9. *Zgjidhja e trekëndëshit kënddrejtë*

Shënojmë bashkësinë e elementeve të trekëndëshit kënddrejtë:

$$\Delta = \{a, b, c, \alpha, \beta, 90^0, S\}.$$

Për trekëndëshin kënddrejtë (fig.4.17) fitojmë relacione të ndryshme ndërmjet brinjëve dhe këndeve.

Për shembull:

$$a = c \cdot \sin\alpha; \quad b = c \cdot \cos\alpha;$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}; \quad c = \frac{b}{\cos\alpha};$$

$$a = b \cdot tg\,\alpha; \quad b = a \cdot ctg\,\alpha.$$

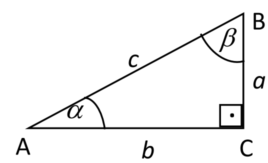


Fig. 3.17

Duke shfrytëzuar Teoremën e Pitagorës dhe kalkulatorin, mund t'i gjejmë elementet e trekëndëshit kënddrejtë, nëse janë dhënë dy prej tyre, sepse elementi i tretë është kënd i drejtë (90^0).

Prandaj mund të jenë dhënë:

1) hipotenuza dhe njëri katet (c dhe a ose c dhe b);
2) katetet (a dhe b);
3) hipotenuza dhe njëri kënd i ngushtë (c dhe α ose c dhe β);
4) kateti dhe një kënd i ngushtë (a, α ose a, β ose b, α ose b, β);
5) lartësia, vija e rëndimit etj.

dhe përmes tyre gjenden elementet e tjera.

Mësimdhënësi jep teoremën:

Teorema e kosinuesit

Për çfarëdo trekëndëshi (fig.3.18) mund të bëjmë lidhjen e brinjëve të trekëndëshit me këndet e tij.

Pra kemi që:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

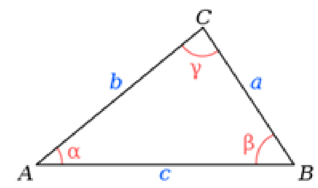


Fig.3.18

Ku a,b,c janë brinjët e trekëndshit, ndërsa α,β,γ janë kënde përkatëse

Poashtu mësimdhënësi formulon teoremën:

Teorema e sinuesit

Për një trekëndësh *çfarëdo* që është brendashkruar një rrethi me rreze **R**,

(fig.3.19) mund të përdorim ketë lidhje:

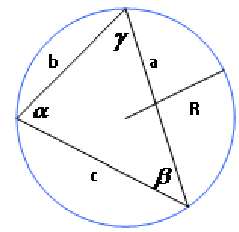


Fig.3.19

Teorema Sinusit

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

ose rrezen mund ta shprehim ndryshe $R=\frac{abc}{4S}=\frac{S}{p},\ ku\ \ p=\frac{a+b+c}{2}$

Sipërfaqja e tij: $S=\frac{a\cdot b\cdot c}{4R}$

Merren shembuj:

Shembulli 1. Janë dhënë $a=102$ dhe $c=321$. Të gjenden elementet e tjera.

Zgjidhja. Nga:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{102}{321}\Rightarrow\sin\alpha=0{,}318\Rightarrow\alpha=18^0 32'.$$

$$\beta=90^0-\alpha=90^0-18^0 32'=89^0 60'-18^0 32'\Rightarrow\beta=71^0 28'.$$

Atëherë brinja:

$$b=c\cdot\sin\beta\Rightarrow b=321\cdot\sin 71^0 28'=304\ \text{dhe}\ S=\frac{1}{2}a\cdot b=15504.$$

Prandaj: $\Delta=\{102;\ 304;\ 321;\ 18^0 32';\ \ 71^0 28';\ 90^0;\ 15504\}$.

Shembulli 2. Janë dhënë katetet $a=30{,}3$ dhe $b=18{,}3$. Të gjenden elementet e tjera.

Zgjidhja. $\Delta=\{30{,}3;\ \ 18{,}3;\ \ 35{,}4;\ \ 58^0 54';\ 31^0 6';\ 90^0;\ 277{,}2\}$.

Shembulli 3. Janë dhënë hipotenuza $c=327$ dhe njëri kënd i ngushtë $\alpha=29^0$. Të gjenden elementet e tjera.

Zgjidhja. $a=c\cdot\sin\alpha=327\cdot 0{,}485=158{,}5$;

$b=c\cdot\cos\beta=327\cdot\sin 61^0=327\cdot 0{,}875=285$;

$\beta=90^0-\alpha=61^0$ dhe $S=\frac{1}{2}\cdot 158{,}5\cdot 286=22665{,}5$.

Shembulli 4. Është dhënë kateti dhe njëri kënd i ngushtë: $a=23{,}4$ dhe $\beta=35^0$. Të gjenden elementet e tjera.

Zgjidhja. $\alpha=90^0-\beta=55^0$; $b=a\cdot\tan\beta=23{,}4\cdot 0{,}700=16{,}4$;

$c=\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{23{,}4}{0{,}819}=28{,}6$; $S=191{,}9$.

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 5 të gjitha rastet .

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. mësimdhënësi vije në përfundim se mund të gjendet elementet e trekëndëshit kënddrejtë dhe çfarëdo trekëndëshi, të cilat mund të shprehen edhe me funksione trigonometrike. Kryesisht vije në shprehje zbatimi i trigonometrisë në situata problemore dhe situata në kontekst.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema:3.1. HYRJE NË TRIGONOMETRI

Njësia mësimore: 3.1.10. Përdorimi i kalkulatorit për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike

PLANIT I ORËS MËSIMORE

Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **3. 1. HYRJE NË TRIGONOMETRI**	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Përkufizon funksionet trigonometrike të këndit të ngushtë; 2. Zgjidh trekëndëshin kënddrejtë; 3. Shndërron masën e këndit nga njësia shkallë në njësinë radian dhe anasjelltas; 4. Përkufizon rrethin trigonometrik dhe funksionet trigonometrike të çfarëdo këndi; 5. Përcakton shenjën e funksioneve trigonometrike në kuadrate; 6. Vërteton identitetet themelore trigonometrike
Njësia mësimore: 3.1.10. Përdorimi i kalkulatorit për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përdorë kalkulatorin për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përdorimin e kalkulatorit për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike.

Fjalët kyçe: kalkulator (shkencor)

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përdorë kalkulatorin për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:
a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*
Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përdorin kalkulatorin për njesimin e vlerave të funksioneve trigonometrike.
Mësimdhënësi:

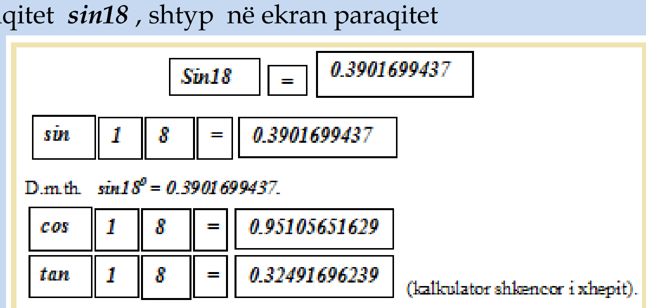
1. Të merret kalkulatori (ai shkencor) ose në kompjuter "Search program" gjendet shenja Calculator

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)
Mësimdhënësi shënon në tabelë:

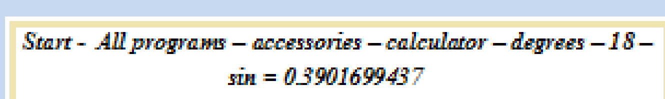
10. Përdorimi i kalkulatorit për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike

mësimdhënësi: Një kalkulator i tillë gjendet edhe në programin e kompjuterve. Meqenëse disa vlera të funksioneve trigonometrike llogariten edhe pa kalkulator si (30^0, 45^0, 60^0 etj.), por në praktikë paraqitet nevoja të gjenden vlera shpejt dhe me saktësi. Një gjë të tillë realizohet duke e përdorur kalkulatorin.
Shembull 1. Të llogariten vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit $\alpha = 18^0$. Vlera e funksionit prej 18^0 nuk mundemi me llogaritë vlerën, andaj:

Zgjidhja. Në kalkulator gjendet tasti, ku shenon *sin,* pra, shtyp tastin pastaj shtyp tastin ***1*** dhe tastin ***8.*** Në ekran paraqitet ***sin18*** , shtyp në ekran paraqitet



Në kalkulatorin e kompjuterit veprohet kështu:



Shembull 2. Të llogariten vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit $\alpha = 1349^0$.

Zgjidhja. Shtyp tastin **sin,** shtyp ***1349⁰***, *shtyp* **= - *0.9998476951;***

cos 1349⁰ = - 0.017455240643

tan 1349⁰ = 57.2899613075.

Shembull 3. Të llogariten vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit:

a) $\alpha = 4^0$; *b*) $\alpha = 4^030`$; *c*) $\alpha = 4^030`5``$

Zgjidhja.

a) ***sin 4 = 0.069756473744;***

b) ***sin (4 + 30:60) = 0.0784590957278;***

c) ***sin (4 + 30:60 + 5:3600) = 0.07848326160.***

Ngjashëm veprohet për funksionet e tjera.

Vërejtje. Funksioni *kotangjent* gjendet si vlerë reciproke e tangjentit d.m.th. 1/ *tangjent*.

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj dhe llogarisi çfarëdo vlere, vetëm është e domosdoshme me e caktuar paraprakisht shenjën e funksioneve trigonometrike. Kjo caktohet se në cilin kuadrat i gjende këndi.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 5 të gjitha rastet .

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se mund të gjendet vlerat e funksioneve trigonometrike të çfarëdo këndi. Kryesisht vije në shprehje zbatimi i trigonometrisë në situata problemore dhe situata në kontekst.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3.2. FORMULAT E ADICIONIT DHE RRJEDHIMET E TYRE

Njësia mësimore: 3.2.1. Formulat e adicionit

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: 3.2. FORMULAT E ADICIONIT DHE RRJEDHIMET E TYRE	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Përvetëson si të gatshme formulat e: - adicionit, - funksioneve trigonometrike të këndit të dyfishtë; - funksioneve trigonometrike të gjysmë këndit		
Njësia mësimore:3.2.1. Formulat e adicionit	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Zbaton formulat e adicionit si të gatshme		
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi 1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet. 2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve; 3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike; 4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.			
Qasja e të nxënit: Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe			

analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përdorimin e kalkulatorit për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike.

Fjalët kyçe: formulë e adicionit

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të zbaton formulat e adicionit si të gatshme

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:
a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*
Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zbaton formulat e adicionit si të gatshme për vlera të funksioneve trigonometrike.
Mësimdhënësi:
Paraqet formulat e adicionit $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ dhe $\cos(\alpha-\beta)$ dhe si kërkesë e tij është që këto formula të shprehen përmes $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\beta$ dhe $\cos\beta$

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)
Mësimdhënësi:

Tani po i paraqesim formulat e adicionot pa vërtetim:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha \quad \text{dhe} \quad \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \text{dhe} \quad \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta.$$

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta} \quad \text{dhe} \quad tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$$

$$ctg(\alpha+\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta} \quad \text{dhe} \quad ctg(\alpha-\beta)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\alpha-ctg\beta}.$$

Shembulli 1. Duke i zbatuar formulat e adicionit, të njehsohet: $\sin\frac{7\pi}{12}$.

Zgjidhja. Meqë $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$, kemi:

$$\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Shembulli 2. Duke i zbatuar formulat e adicionit, të njehsohen sinusi dhe kosinusi i këndit 75^0.

Zgjidhja. $\cos 75^0=\cos(45^0+30^0)=\cos 40^0\cos 30^0+sion 30^0\cos 45^0=$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Shembulli 3. Le të jenë $0<\alpha<90^0, 90^0<\beta<180^0$, $ctg\alpha=\frac{8}{15}$, $ctg\beta=-\frac{7}{24}$. Të njehsohet $\sin(\alpha-\beta)$.

Zgjidhja. Për të njehsuar $\sin(\alpha-\beta)$, fillimisht duhet njehsuar $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$. Meqë $0<\alpha<90^0$, $\sin\alpha$ është pozitiv, prandaj kemi: $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{15}\right)^2}}=\frac{15}{17}$.

Po ashtu, $\cos\alpha=\sin\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{15}{17}\cdot\frac{8}{15}=\frac{8}{17}$. Ngase $90^0<\beta<180^0$, po ashtu $\sin\beta$ është pozitiv, si në rastin e më sipër fitohet $\sin\beta=\frac{24}{25}$, $\cos\beta=-\frac{7}{25}$. Prandaj:

$$\sin(\alpha-\beta)=\frac{15}{17}\left(-\frac{7}{25}\right)-\frac{8}{17}\cdot\frac{24}{25}=-\frac{297}{425}.$$

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 5, 6 dhe 7.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin dhe rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi e bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se mund të zbatoi formulat edicionit në raste konkrete. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3. 2. FORMULAT E ADICIONIT DHE RRJEDHIMET E TYRE

Njësia mësimore: 3.2.2. Funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe
3.2.3. Funksionet trigonometrike të gjysmë këndeve

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: 3.2. FORMULAT E ADICIONIT DHE RRJEDHIMET E TYRE	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi:		

	1. Përvetëson si të gatshme formulat e: - adicionit, - funksioneve trigonometrike të këndit të dyfishtë; - funksioneve trigonometrike të gjysmë këndit
Njësia mësimore: 3.2. Funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe funksionet trigonometrike të gjysmë këndeve	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** Zbaton funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe funksionet trigonometrike të gjysmë këndeve
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi 1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet. 2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve; 3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike; 4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.	
Qasja e të nxënit: Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përdorimin e kalkulatorit për llogaritjen e vlerave të funksioneve trigonometrike.	
Fjalët kyçe: kënd i dyfishtë, gjysmë kënd	
Kriteret e suksesit: *Mësimdhënësi*, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore 1. Të zbaton funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe funksionet trigonometrike të gjysmë këndeve	
Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore: Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.	
Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore: Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.	
Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe **Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës** ***Organizimi i orës së mësimit:*** ***a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)* Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga	

nxënësit të zbaton funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe funksionet trigonometrike të gjysmë këndeve për vlera të funksioneve trigonometrike.
Mësimdhënësi:
Shtron pyetje lidhur me formulat e edicioni $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ dhe $\cos(\alpha-\beta)$.
Poashtu pyet se nëse marrim $\beta=\alpha$ çfarë fitohet ?

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

2.2. Funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë

Mësimdhënësi: Nëse te formulat e adicionit merret $\beta=\alpha$ fitohen funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë.
Kemi:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha .$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha .$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} .$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2\cdot ctg\alpha} .$$

Shembulli 1. Nëse $\cos x = \frac{1}{2}$ dhe $0 < x < \frac{\pi}{2}$, njehsohet $\sin 2x$.

Zgjidhja. Fillimisht njehsojmë $\sin x$. Meqë $0 < x < \frac{\pi}{2}$, shprehja $\sin x$ është pozitive, prandaj:

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

prej nga kemi:

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Shembull 2. Të shprehen $\sin 2\alpha$ dhe $\cos 2\alpha$ me anë të $\tan\alpha$.

Zgjidhja. Meqë

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$$

atëherë:

$$\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha = 2\cdot tg\alpha\cdot\cos^2\alpha .$$

Po ashtu është e njohur se:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$$

atëherë:

$$\sin 2x = 2 \cdot tg\alpha \cdot \frac{1}{1+tg^2\alpha} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

Ngjashëm vërtetojmë se:

$$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}.$$

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

2.3. *Funksionet trigonometrike të gjysmë këndeve*

Po ashtu mund të paraqesim vlerat e funksioneve trigonometrike të gjysmë këndeve:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}, \qquad ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Shembulli 5. Të gjendet vlera e $\cos 15^0$.

Zgjidhja. Nisemi nga:

$$\cos 15^0 = \cos\frac{30^0}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Shembulli 6. Të gjenden vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit: $\frac{\pi}{8}$.

Zgjidhja. Meqë i dimë vlerat e funksioneve trigonometrike të këndit $\frac{\pi}{4}$, shfrytëzojmë formulat e funksioneve trigonometrike të gjysmë këndit:

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sin\frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Ngjashëm njehsojmë rastet e tjera:

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \qquad \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1, \qquad \cot\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}+1.$$

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt ai vet krijon shembuj.
Vlerësimi i nxënësve Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja. Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 7.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin për rrjedhën e orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se mund të zbatoi formulat e adicionit në raste konkrete te funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe të gjysmë kënde. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen e kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3.3. PARAQITJA GRAFIKE E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

Njësia mësimore: 3.3.1. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x) = \sin x$

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: 3.3. PARAQITJA GRAFIKE E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Shqyrton dhe paraqet grafikisht funksione të ndryshme trigonometrike; 2. Gjen periodën e funksionit trigonometrik; 3. Përkufizon funksionet e anasjelltë trigonometrike.
Njësia mësimore: 3.**3**.1. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x)=\sin x$	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** Paraqet grafikisht funksionin sinus dhe përvetëson vetit e tij
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi 1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet. 2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve; 3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike; 4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.	
Qasja e të nxënit: Angazhimi individual, duke diskutuar për paraqitjen grafike të funksionit sinus dhe duke i përvetësuar vetit dhe forma të ndryshme.	
Fjalët kyçe: grafik i funksionit sinus, fushë e përkufizimit, periodë, zero, monotoni , vlera ekstreme	
Kriteret e suksesit: *Mësimdhënësi,* kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore 1. Të paraqes grafikun e funksionit sinus dhe të përvetësoi vetit e tij funksionet trigonometrike të këndit të dyfishtë dhe funksionet trigonometrike të gjysmë këndeve	
Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore: Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.	
Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore: Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.	

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të paraqet grafikisht funksionin trigonometrik sinus duke i përvetësuar vetit e tij.

Mësimdhënësi:

Shtron pyetje lidhur me funksionin sinus që nxënësi veç tani ka mjaft informacione lidhur me këtë funksion. Në këtë mënyrë mësimdhënësi shtron disa pyetje: Çka quhet sinus ? Pyet për disa vlera e sinusit për sh. 0, 20, 45, 60, 90, 180, 270, 360 shkallë etj

c. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

3.1. Grafiku i funksionit $f(x)=\sin x$,

Mësimdhënësi:

A. Grafiku i funksionit $f(x)=\sin x$, është bashkësia e të gjitha pikave $\{(x, \sin x) \mid x \in R\}$, që paraqitet me vijën e lakuar $y=\sin x$, e cila quhet *sinusoidë.*

Që të arrihet një paraqitje për trajtën e asajë vije, merren disa pika dhe paraqiten në sistemin koordinativ Oxy .P.sh. si në tabelën vijuese:

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	0.17	0.26	0.34	0.50	0.64	0.71	0.77	0.87	0.97	0.99	1

Kështu fitohen këto pika të grafikut të funksionit $f(x)=\sin x$:

$(0,\ 0), \left(\frac{\pi}{18},\ 0.17\right), \left(\frac{\pi}{12},\ 0.26\right), \left(\frac{\pi}{9},\ 0.34\right), \left(\frac{\pi}{6}, 0.50\right), \left(\frac{2\pi}{9},\ 0.64\right), \left(\frac{\pi}{4}, 0.71\right),$

$\left(\frac{5\pi}{18}, 0.77\right), \left(\frac{\pi}{3},\ 0.87\right), \left(\frac{5\pi}{12}, 0.97\right), \left(\frac{4\pi}{9}, 099\right), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right).$

Pikat me abshisë x dhe ordinatë $y = \sin x$ formojnë pjesën përkatëse të grafikut të funksionit (fig.3.20) $f(x) = \sin x$ në segmentin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

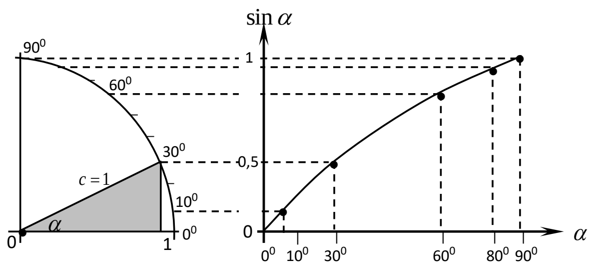


Fig. 3. 20

Ngjashëm veprohet për vlera të tjetra të x. Por mund të shfrytëzohet edhe vetia se funksioni $\sin x$ është simetrik ndaj drejtëzës $x = \frac{\pi}{2}$, ngase $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Grafiku është simetrik në varshmëri me pikën $(\pi, 0)$ sepse $\sin(\pi + x) = -\sin(\pi - x)$ dhe se perioda e funksionit $\sin x$ është 2π (perioda themelore), gjegjësisht perioda e përgjithshme është $2k\pi$, sepse $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$ për çdo $k \in Z$.

Grafiku i funksionit $f(x) = \sin x$:

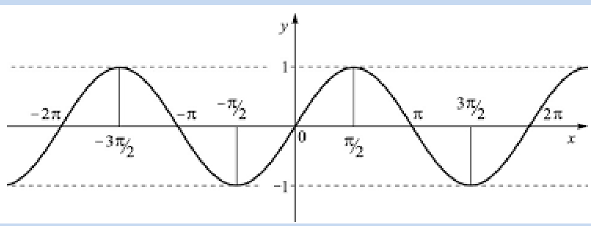


Fig.3.21

Për të shqyrtuar shembuj të ndryshëm të funksionit sinus, është mirë që nga ky grafik të nxirren disa veti që ndihmojnë paraqitjen grafike të tyre (fig.3.21).

B. Vetitë e funksionit $f(x) = \sin x$

1^0 Funksioni $f(x) = \sin x$ është i përkufizuar për çdo vlerë reale $x \in (-\infty, +\infty)$, që rrjedh nga përkufizimi i shprehjes $\sin x$. Grafikisht kuptohet se për çdo $a \in R$ drejtëza $x = a$ (paralel me boshtin y) e pren grafikun e funksionit në një pikë të vetme.

2^0 Zerot e funksionit $f(x) = \sin x$ gjenden me zgjidhjen e ekuacionit $\sin x = 0$, prandaj kemi $x = k\pi$, ($k \in Z$). Grafikisht këto pika janë pikat e prerjes së grafikut të funksionit me boshtin Ox.

3^0 Funksioni $f(x) = \sin x$ ka shenjë pozitive në intervalin $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, sepse çfarëdo vlere të argumentit x në këtë interval funksioni $f(x)>0$, grafiku i funksionit në këtë interval gjendet mbi boshtin x. Ndërsa ka shenjë negative në intervalin $(2k+1)\pi < x < 2(k+1)\pi$, d.m.th. $f(x)<0$, grafiku i funksionit në këtë interval gjendet nën boshtin x. Praktikisht shenja caktohet, duke marrë intervalet ndërmjet zerove të funksionit dhe duke i dhënë vlera të ndryshme të x në ato intervale prej nga shihet se funksioni merr vlera pozitive apo negative.

4^0 Funksioni $f(x)=\sin x$ është funksion tek, sepse $\sin(-x)=-\sin x$. Grafiku i tij është simetrik ndaj origjinës së sistemit koordinativ.

5^0 Meqë dihet se për çdo $x\in R$ dhe për çdo $k\in Z$ vlen $\sin(x+2\pi)=\sin x$, gjegjësisht $\sin(x+2k\pi)=\sin x$, funksioni $f(x)=\sin x$ është periodik me periodë themelore 2π. që do të thotë se grafiku i këtij funksioni përbëhet prej pjesëve identike që i'u përgjigjet intervaleve me gjatësi $[0,2\pi]$, në boshtin x. Nëse dihet grafiku i funksionit në atë interval, ai vetëm me anë të translacionit bartet, nga e majta në të djathtë për atë interval.

6^0 Meqë për funksionin $f(x)=\sin x$ vlen $-1\le \sin x\le +1$, thuhet se ky funksion është *i kufizuar*. Grafiku i tij shtrihet ndërmjet drejtëzave $y=-1$ dhe $y=1$, dhe janë paralele me boshtin x.

7^0 Grafiku i funksionit $f(x)=\sin x$ ka vlerë ekstreme-maksimum në pikat:

$$\left(x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ y=1\right),\ k\in Z.$$

Caktohet me zgjidhjen e ekuacionit $\sin x=1$. Pra, në atë pikë ordinata është më e madhja dhe kur nga ajo pikë largohemi, nga ana e majtë dhe nga ana e djathtë, ordinata ka vlerë më të vogël.

Ngjashëm, funksioni arrin vlerën ekstreme-minimum në pikat:

$$\left(x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi, y=-1\right),\ k\in Z.$$

Caktohet me zgjidhjen e ekuacionit $\sin x=-1$.

8^0 Në bazë të përkufizimit të funksionit *sinx* dhe nga vlerat ekstreme maksimum dhe minimum mund të konkludojmë se:

kur x rritet prej $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ deri në $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $\sin x$ rritet prej -1 deri në +1;

kur x rritet prej $\frac{\pi}{2}+2n\pi$ deri në $\frac{3\pi}{2}+2n\pi$, $\sin x$ zvogëlohet prej +1 deri në -1.

9^0 Nga të gjtha këto veti që u dhanë për funksionin, $f(x)=\sin x$ mund ta vizatojmë grafikun e tij.

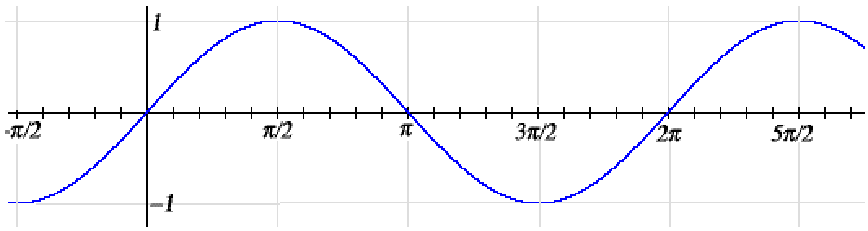


Fig. 3. 22

C. Paraqitja grafike e funksionit $f(x) = a\sin(bx + c)$

Supozojmë se është $a \neq 0,\ b > 0,\ c \neq 0$. Atëherë funksioni i dhënë mund të shkruhet:

$$f(x) = a\sin(bx + c) = a\sin b\left(x + \frac{c}{b}\right)$$

Ka këto veti:

1. Është i përkufizuar për çdo $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Funksioni ka zero $x = \dfrac{k\pi - c}{b}$ $(k \in Z)$.

3. Funksioni ka periodë $T = \dfrac{2\pi}{b}$.

4. Funksioni është i kufizuar $-|a| \leq a\sin(bx + c) \leq +|a|$.

5. Funksioni arrin vlerën maksimale $|a|$ në ato pika në të cilat është $\sin(bx + c) = 1$, nëse $a > 0$, ose -1, nëse $a < 0$.

Ngjashëm, funksioni arrin vlerën minimale $-|a|$, kur $\sin(bx + c) = -1$, për $a > 0$, ose 1, për $a < 0$.

6. Funksioni është pozitiv në të gjitha intervalet ndërmjet dy vlerave të njëpasnjëshme të zerove në të cilat arrin vlerën maksimale $|a|$, ndërsa negativ në të gjitha intervalet ndërmjet dy vlerave të njëpasnjëshme të zerove në të cilat arrinë vlerën minimale $-|a|$.

7. Funksioni rritet prej $-|a|$ deri te $|a|$, gjegjësisht zvogëlohet prej $|a|$ deri të $-|a|$, në intervale në të cilat varën nga shënja e numrit *a*.

8. Së pari e konstruktojmë sinusoidën themelore $f(x) = \sin x$, pastaj e paraqesim grafikun e funksionit

$f(x)=\sin bx$, i cili ka periodë $T=\frac{2\pi}{b}$. Tani këtë grafikë e bartim për $\left|\frac{c}{b}\right|$ djathtas, nëse $\frac{c}{b}<0$, apo majtas nëse $\frac{c}{b}>0$ dhe fitohet grafiku i funksionit (fig.3.23):

$$f(x)=a\sin(bx+c)=a\sin b\left(x+\frac{c}{b}\right).$$

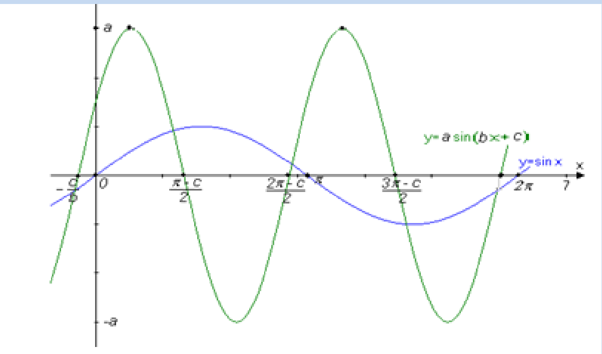


Fig.3.23

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura (punë e pavarur ose në grupe)

Nxënësve bazuar nga ajo që prezantoi mësimdhënësi mund të paraqes grafikisht funksione trigonometrike të ndryshme që kanë të bëjë me sinusin psh. $f(x)=2\sin x$

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 2 dhe 3.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. mësimdhënësi vije në përfundim se funksioni trigonometrik sinus mund të paraqitet grafikisht duke i përvetësuar vetit e tij.. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës

nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3.3. PARAQITJA GRAFIKE E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

Njësia mësimore: 3.3.2. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x) = \cos x$

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 3.3. PARAQITJA GRAFIKE E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi:
1. Shqyrton dhe paraqet grafikisht funksione të ndryshme trigonometrike;
2. Gjen periodën e funksionit trigonometrik;
3. Përkufizon funksionet e anasjelltë trigonometrike.</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 3.3.2. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit
$f(x) = \cos x$</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
Paraqet grafikisht funksionin kosinus dhe përvetëson vetit e tij</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi
1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, duke diskutuar për paraqitjen grafike të funksionit kosinus dhe duke i përvetësuar vetit dhe forma të ndryshme.</td></tr>
</table>

Fjalët kyçe: grafik i funksionit kosinus, fushë e përkufizimit, periodë, zero, monotoni , vlera ekstreme

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të paraqes grafikun e funksionit kosinus dhe të përvetësoi vetit e tij

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të paraqet grafikisht funksionin trigonometrik kosinus duke i përvetësuar vetit e tij.

Mësimdhënësi:

Shtron pyetje lidhur me funksionin kosinus për të cilin nxënësi tani ka mjaft informacione lidhur me këtë funksion. Në këtë mënyrë mësimdhënësi shtron disa pyetje: Çka quhet kosinus ? Pyet për disa vlera e kosinusit për sh. 0, 20, 45, 60, 90, 180, 270, 360 shkallë etj

a. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë :

3.2. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x)=\cos x$

Mësimdhënësi:

A. Konstruktimi i grafikut të funksionit $f(x)=\cos x$

Grafiku i funksionit $f(x)=\cos x$ është bashkësi e të gjitha pikave $\{(x,\cos x)\,|\,x\in R\}$, që paraqiten me lakoren $f(x)=\cos x$, e cila quhet ko*sinusoidë*

Që të arrihet një paraqitje për trajtën e asaj lakoreje, merren disa pika dhe paraqiten në sistemin koordinativ Oxy .P.sh. si në tabelën vijuese:

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	0.98	0.96	0.93	0.86	0.76	0.71	0.64	0.5	0.26	0.17	0

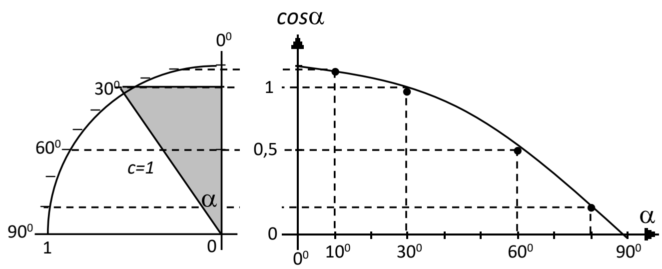


Fig.3.24

Vlerat e pikave të kësaj tabele me abshisë x dhe ordinatë $f(x)=\cos x$ formojnë pjesën përkatëse të grafikut të funksioni $f(x)=\cos x$ në intervalin $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, dhe ngjashëm veprohet për vlera të tjera të argumentit x.

Po ashtu edhe perioda e funksionit cos është 2π (perioda themelore) gjegjësisht perioda e përgjithshme $2k\pi$, sepse $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ për çdo $k\in Z$. Kjo lehtë shihet se nëse argumentit x i shtohet 2π , funksioni nuk e ndërron vlerën (merri disa raste).

Grafiku i funksionit $f(x)=\cos x$ mund të konstruktohet edhe në mënyra të tjera, p. sh.

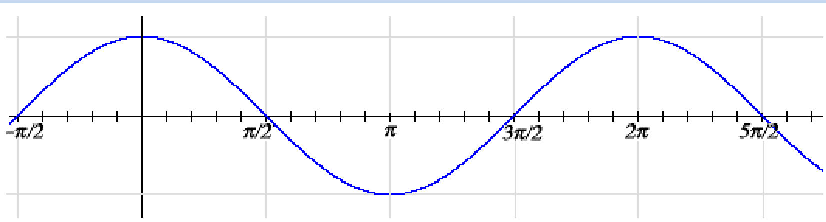


Fig. 3. 25

$f(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$.

Shënim: Për të shqyrtuar shembuj të ndryshëm të funksionit kosinus, është mirë që nga grafiku i kosinusit të nxirren disa veti që ndihmojnë paraqitjen grafike të tyre.

B. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x)=\cos x$

1^0 Funksioni $f(x)=\cos x$ është i përkufizuar për çdo vlerë reale të $x\in(-\infty,+\infty)$.

2^0 Zerot e funksionit $f(x)=\cos x$ gjenden me zgjidhjen e ekuacionit $\cos x=0$, prandaj $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ($k\in Z$).

3^0 Funksioni $f(x)=\cos x$ ka shenjë pozitive në intervalin: $-\frac{\pi}{2}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi$,

ndërsa negative në intervalin $2k\pi+\frac{\pi}{2}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{2}$.

4^0 Funksioni $f(x)=\cos x$ është funksion çift, sepse $\cos(-x)=\cos x$, d.m.th. grafiku i tij është simetrik ndaj boshtit Oy.

5^0 Meqë për çdo $x\in R$ dhe për çdo $k\in Z$ vlen $\cos(x+2\pi)=\cos x$, gjegjësisht $\cos(x+2k\pi)=\cos x$, funksioni $f(x)=\cos x$ është periodik me periodë themelore 2π.

6^0 Meqë për funksionin $f(x)=\cos x$ vlen $-1\le\cos x\le+1$, thuhet se ky funksion është *i kufizuar.*

7^0 Grafiku i funksionit $f(x)=\cos x$ ka vlerë ekstreme maksimum në pikën: $(x=2k\pi,\ y=1)$.

Caktohet me zgjidhjen e ekuacionit $\cos x=1$. Ngjashëm funksioni arrin vlerën ekstrem minimum në pikën: $(x=\pi+2k\pi,\ y=-1)$, që caktohet me zgjidhjen e ekuacionit $\cos x=-1$.

8^0 Në bazë të përkufizimit të funksionit *cos* dhe nga vlerat ekstreme (maksimum dhe minimum) mund të konkludojmë se:

kur x rritet prej $(2n+1)\pi$ deri në $(2n+2)\pi$, $\cos x$ rritet prej -1 deri në +1;

kur x rritet prej $2n\pi$ deri në $(2n+1)\pi$, $\cos x$ zvogëlohet prej -1 deri në +1.

9^0 Nga të gjitha këto veti që u dhanë për funksionin, $f(x)=\cos x$ mund ta vizatojmë grafikun e tij (fig.3.26)

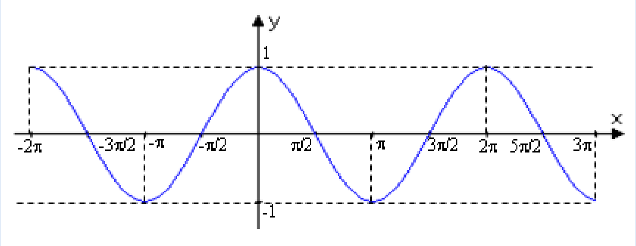


Fig.3.26

Shembulli 4. Të paraqiten grafikisht funksionet:

a) $f(x) = 2 + \cos x$,

b) $f(x) = -\cos x$.

Zgjidhja.

a) Grafiku i funksionit $f(x) = 2 + \cos x$ është sikurse edhe grafiku i funksionit $f(x) = \cos x$ vetëm që për dy njësi me anë të translacionit bartet paralel me boshtin *x*.

1. Është i përkufizuar për çdo vlerë të $x \in (-\infty, +\infty)$.

2. Zerot e funksionit:

$$y = 0 \Leftrightarrow 2 + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = -2,$$

d.m.th funksioni nuk ka zero, sepse nuk eksiston asnjë vlerë e *x* që funksioni *cos* të ketë vlerën -2.

3. Funksioni është pozitiv për çdo vlerë të *x*.

4. Perioda e funksionit është:

$$T = 2\pi.$$

5. Është i kufizuar

$$1 \le \cos x \le 3$$

6. Funksioni ka vlerë ekstreme- maksimum në pikën:

$$(x = 2k\pi,\ y = 3).$$

Funksioni arrin vlerën ekstreme-minimum në pikën: $(x = \pi + 2k\pi,\ y = 1)$.

7. Funksioni është rritës prej $(2k+1)\pi$ deri $(2k+2)\pi$ dhe është zvogëlues prej $2k\pi$ deri $(2k+1)\pi$.

8. Grafiku i funksionit:

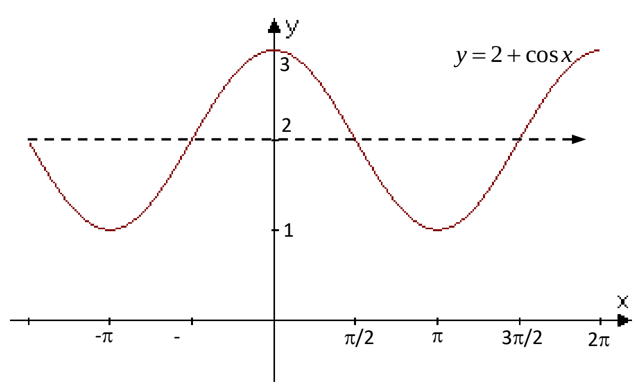


Fig. 3. 27

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga ajo që prezantoi mësimdhënësi mund të paraqes grafikisht funksione trigonometrike të ndryshme që kanë të bëjë me sinusin p.sh. $f(x) = 2\cos x$

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe se sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 1 nën b).

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin për rrjedhën e orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se funksioni trigonometrik sinus mund të paraqitet grafikisht duke i përvetësuar vetit e tij. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 3. 3. PARAQITJA GRAFIKE E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE

Njësia mësimore: 3.3.3 & 4.3.4. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x) = tgx$ dhe

$$f(x) = ctg\ x$$

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore:	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

MATEMATIKË			

Tema: 3.3. PARAQITJA GRAFIKE E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi: 1. Shqyrton dhe paraqet grafikisht funksione të ndryshme trigonometrike; 2. Gjen periodën e funksionit trigonometrik; 3. Përkufizon funksionet e anasjelltë trigonometrike.
Njësia mësimore: 3.3.3 & 3.3.4. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x)=tgx$ $f(x)=ctgx$	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Paraqet grafikisht funksionin tangjent dhe përvetëson vetit e tij 2. Paraqet grafikisht funksionin kotangjente dhe përvetëson vetit e tij

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, duke diskutuar për paraqitjen grafike të funksionit tan dhe cot dhe duke i përvetësuar vetit dhe forma të ndryshme.

Fjalët kyçe: grafik i funksionit tan dhe cot, fushë e përkufizimit, periodë, zero, monotoni , vlera ekstreme

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të paraqes grafikun e funksionit tangjent dhe të përvetësoi vetit e tij
2. Të paraqes grafikun e funksionit kotangjente dhe të përvetësoi vetit e tij

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

*a. **Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve** (rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të paraqet grafikisht funksionin trigonometrik tangjent dhe kotangjente duke i përvetësuar vetit e tij.

Mësimdhënësi:

Shtron pyetje lidhur me funksionin kosinus që nxënësi veç tani ka mjaft informacione lidhur me këtë funksion. Në këtë mënyrë mësimdhënësi shtron disa pyetje: Çka quhet tangjent dhe kotangjente ? Pyet për disa vlera e tangjentit dhe kotangjentet për sh. 0, 20, 45, 60, 90, 180 shkallë etj

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënsi shënon në tabelë:

3. 3. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x) = tg\,x$

Mësimdhënësi:

A. Konstruktimi i grafikut të funksionit $f(x) = tg\,x$

Grafiku i funksionit $f(x) = \tan x$ është bashkësia e të gjitha pikave $\{(x, tgx) \mid x \in R\}$, që paraqitet me lakoren $f(x) = tgx,$ e cila quhet *tangjentoidë.*

Që të arrihet një paraqitje për trajtën e asaj lakoreje, merren disa pika dhe paraqiten në sistemin koordinativ Oxy .P.sh. si në tabelën vijuese:

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	0.17	0.26	0.36	0.57	0.83	1	1.19	1.73	3.73	5.67	∞

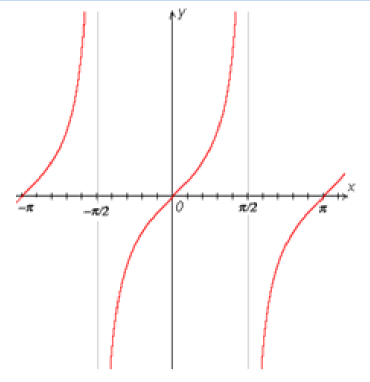


Fig.3.28

Vlerat e pikave të kësaj tabele me abshisë x dhe ordinatë $f(x) = tgx$ formojnë pjesën përkatëse të grafikut të funksionit (fig.3.28) $f(x) = tgx$ në segmentin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ngjashëm veprohet për vlerat e tjetra të x.

Po ashtu edhe perioda e funksionit tangjent është π (perioda themelore) gjegjësisht perioda e përgjithshme është $n\pi$, sepse $tg(x + n\pi) = tgx$ për çdo $n \in Z$. Kjo shihet lehtë kur argumentit x i shtohet π, funksioni nuk e ndërron vlerën (merr disa raste).

Grafiku i funksionit $f(x)=\tan x$ mund të konstruktohet edhe në mënyra të tjera, si $f(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$.
Për të shqyrtuar shembujt e ndryshëm të funksionit kosinus, është mirë që nga ky grafik të nxirren disa veti që ndihmojnë paraqitjen grafike të tyre.

B. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x)=tg\,x$

1. Funksioni $f(x)=tg\,x$ është i përkufizuar për çdo vlerë reale $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in Z)$.

2. Zerot e funksionit $f(x)=tg\,x$ gjenden me zgjidhjen e ekuacionit $tg\,x=0$, pra $x=k\pi$, $(k\in Z)$.

3. Funksionit $f(x)=tg\,x$ ka shenjë pozitive në intervalin:

$$k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \ (k\in Z).$$

Ndërsa ka shenjë negative në intervalin: $k\pi+\dfrac{\pi}{2}<x<(k+1)\pi$, $(k\in Z)$.

4. Funksioni $f(x)=tg\,x$ është tek, sepse $tg(-x)=-tgx$, d.m.th. grafiku i tij është simetrik ndaj origjinës së sistemit koordinativ.

5. Meqë për çdo $x\in R$ dhe për çdo $k\in Z$ vlen $tg(x+\pi)=tgx$, gjegjësisht $tg(x+n\pi)=tgx$, funksioni $f(x)=tg\,x$ është periodik me periodë themelore π.

6. Meqë për funksionin $f(x)=tg\,x$ vlen $-\infty\leq tg\,x\leq+\infty$, thuhet se ky funksion është *i pakufizuar.*

7. Funksioni $f(x)=tg\,x$ nuk ka vlerë ekstreme.

8. Meqë funksioni tg nuk ka vlera ekstreme, ky funksion është vetëm rritës. Është rritës sepse për vlera më të mëdha të argumentit *x*, funksioni tg merr vlerë më të madhe.

9. Nga të gjitha këto veti të funksionit $f(x)=tgx$ mund ta vizatojmë grafikun e tij.

Shembulli 7. Të paraqitet grafikisht funksioni $y=tg\,2x$.

Zgjidhja.

1. Fusha e përkufizimit është për $\cos 2x\neq 0$

$$\cos 2x\neq\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\Leftrightarrow 2x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}.$$

2. Zerot e funksionit: $tg\,2x=0\Leftrightarrow tg\,2x=tg\,k\pi\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=\dfrac{k\pi}{2}$

3. Shenja: $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right)$, $f(x)>0$;

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2} \right),\ f(x) < 0.$$

4. Monotonia: për çdo vlerë të x funksioni f është rritës.
5. Vlera ekstreme nuk ka.
6. Simetria: $f(-x) = tg\, 2(-x) = -tg\, 2x$,

   d.m.th. është tek (simetrik ndaj origjinës).
7. Perioda: $2T = \pi \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{2}$.
8. Grafiku, fig.3.29.

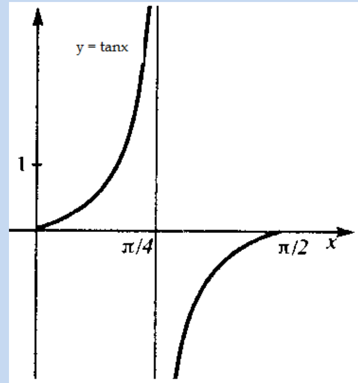


Fig.3.29

3.4. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit $f(x) = ctg\, x$

A**. Konstruktimi i grafikut të funksionit** $f(x) = ctg\, x$

Grafiku i funksionit $f(x) = ctg\, x$ është bashkësia e të gjitha pikave $\{(x, ctg\, x) \mid x \in R\}$, që paraqitet me lakoren $f(x) = ctg\, x$ e cila quhet *kotangjentoidë.*

Që të arrihet një paraqitje për trajtën e asaj lakoreje, merren disa pika dhe paraqiten në sistemin koordinativ Oxy. P.sh. si në tabelën vijuese:

x	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$
$ctg\, x$	∞	5.88	3.84	2.77	1.75	1.20	1	0.84	0.57	0.26	0.17	0

Vlerat e pikave të kësaj tabele me abshisë x dhe ordinatë $f(x) = ctg\, x$:

formojnë pjesën përkatëse të grafikut të funksioni $f(x) = ctgx$ në intervalin $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dhe ngjashëm veprohet për vlerat e tjetra të x.

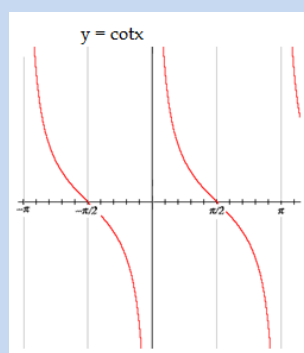


Fig.3.30

Po ashtu edhe perioda e funksionit kotangjente është π (perioda themelore) gjegjësisht perioda e përgjithshme është $k\pi$, sepse $ctg(x + n\pi) = ctgx$ për çdo $k \in Z$. Kjo shihet lehtë se nëse argumentit x i shtohet π, funksioni nuk e ndërron vlerën (merri disa raste).

Grafiku i funksionit $f(x)=ctgx$ mund të konstruktohet edhe në mënyra të tjera, si $f(x)=\frac{1}{ctgx}$, apo $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$. Për të shqyrtuar shembuj të ndryshëm të funksionit kotangjent, është mirë që nga ky grafik (fig.3.30) të nxirren disa veti që ndihmojnë paraqitjen grafike të tyre.

A. Shqyrtimi dhe paraqitja grafike e funksionit

$$f(x)=\cot x$$

1. Funksioni $f(x)=\cot x$ është i përkufizuar për çdo vlerë reale të $x\neq k\pi$, $(k\in Z)$.

2. Zerot e funksionit $f(x)=ctg\,x$ gjenden me zgjidhjen e ekuacionit $ctg\,x=0$, pra, $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(k\in Z)$.

3. Funksionit $f(x)=ctg\,x$ ka shenjë pozitive në intervalin:

$$k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi .$$

Ndërsa është negativ në intervalin $k\pi+\frac{\pi}{2}<x<(k+1)\pi$, $(k\in Z)$.

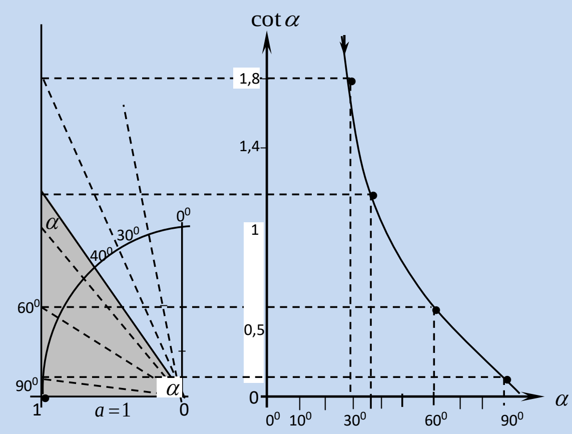


Fig.3.31

4. Funksioni $f(x)=ctg\,x$ është funksion tek, sepse $ctg(-x)=-ctg\,x$, d.m.th. grafiku i tij është simetrik ndaj origjinës së sistemit koordinativ.
5. Meqë për çdo $x\in R$ dhe për çdo $k\in Z$ vlen $ctg(x+\pi)=ctg\,x$, gjegjësisht $ctg(x+k\pi)=ctg\,x$, funksioni $f(x)=ctg\,x$ është periodik me periodë themelore π.
6. Meqë për funksionin $f(x)=ctg\,x$ vlen $-\infty\leq ctg\,x\leq+\infty$, thuhet se ky funksion është *i pakufizuar*.
7. Funksioni $f(x)=ctg\,x$ nuk ka vlerë ekstreme.
8. Meqë funksioni kotangjente nuk ka vlera ekstreme, ky funksion është vetëm zvogëlues. Është zvogëlues, sepse për vlera më të mëdha të argumentit x, funksioni *cot x* merr vlerë më të vogël.
9. Nga të gjitha këto veti të dhëna për këtë funksion, mund të vizatohet grafiku i tij, (fig.3.31).

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga ajo që prezantoi mësimdhënësi mund të paraqes grafikisht funksione trigonometrike të ndryshme që kanë të bëjë me kosinusin p.sh. $f(x)=2\cos x$

Vlerësimi i nxënësve Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja. Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 7.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se funksioni trigonometrik sinus mund të paraqitet grafikisht duke i përvetësuar vetit e tij. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema 3.4. EKUACIONET DHE INEKUACIONET TRIGONOMETRIKE

Njësia mësimore 3.4.1. Ekuacionet trigonometrike

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: 3.4. PARAQITJA	**Rezultati i të nxënit të temës:**		

GRAFIKE E FUNKSIONEVE TRIGONOMETRIKE	Nxënësi: 1. Shqyrton dhe paraqet grafikisht funksione të ndryshme trigonometrike; 2. Gjen periodën e funksionit trigonometrik; 3. Përkufizon funksionet e anasjelltë trigonometrike.
Njësia mësimore: 3.4.1. Ekuacionet trigonometrike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Zgjidh ekuacionet trigonometrike $\sin x = a$, $\cos x = a$ $tg\, x = a$ dhe $ctg\, x = a$.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, duke diskutuar për zgjidhjen e ekuacioneve trigonometrike.

Fjalët kyçe: ekuacion trigonometrik

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të zgjidhen ekuacionet trigonometrike $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$ dhe $ctg\, x = a$.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

*a. **Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zgjidh ekuacionet trigonometrike.

Mësimdhënësi

1. Çka quhet ekuacion?
2. Si mund ta kuptoni ekuacionin trigonometrik?
3. Si mund të duket një ekuacion trigonometrik?
4. Kush po e shënon në tabelë një shembull të ekuacionit trigonometrik?

b. *Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)*

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

4.1. Ekuacionet trigonometrike

Mësimdhënësi: Çdo barazim që përmban së paku njërin prej funksioneve trigonometrike, quhet ekuacion trigonometrik . Ekuacionet trigonometrike të formës: $\sin x = a$, $\cos x = b$, $tg\, x = c$ dhe $ctg\, x = d$ ku $a, b, c, d \in R$ quhen ekuacione themelore trigonometrike.

Zgjidhja e ekuacionit $\sin x = a$

Për të zgjidhur ekuacionin $\sin x = a$ kur $-1 \le a \le +1$ veprojmë kështu:

1. Gjejmë një kënd α, që e ka sinusi vlerën e barabartë a (me tabelë ose kalkulator).
2. Një kënd tjetër që e ka sinusin a është $180^0 - \alpha$.
3. Të gjitha zgjidhjet e ekuacionit $\sin x = a$ janë $x = k \cdot 360^0 + \alpha$
   ose $x = k \cdot 360^0 + (180^0 - \alpha)$, ku $k \in Z$.

Shembull 1. Të zgjidhet ekuacioni $\sin x = 0$.

Zgjidhje:
Sinusi ka vlerën zero për vlera të $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..., \pm k\pi$ ku $k \in Z$.

Shembulli 2. Të zgjidhen ekuacionet:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\sin x = \frac{1}{2}$

Zgjidhje

a) Me parë kemi treguar se $\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dhe $\sin(180^0 - 45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 135^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Andaj kemi : $x = k \cdot 360^0 + 45^0$ ose $x = k \cdot 360^0 + 135^0$, $k \in Z$.

b) Nga tabela trigonometrike, shohim që dy kënde x që e kanë sinusin $\frac{1}{2}$ që janë 30^o dhe $(180^0 - 30^0) = 150^0$, ndaj shkruajmë: $x = k \cdot 360^0 + 30^0$ ose $x = k \cdot 360^0 + 150^0$, $k \in Z$.

Zgjidhja e ekuacionit $\cos x = b$

Për të zgjidhur ekuacionin $\cos x = b$ kur $-1 \le b \le +1$ veprojmë kështu:

1. Gjejmë një kënd α, që e ka kosinusin vlerën e barabartë me *b* (me tabelë ose kalkulator).
2. Një kënd tjetër që e ka kosinusi *b* është $(-\alpha)$.
3. Të gjitha zgjidhjet e ekuacionit $\cos x = b$ janë $x = k \cdot 360^0 + \alpha$ ose $x = k \cdot 360^0 - \alpha$, ku $k \in Z$.

Shembull 3. Të zgjidhet ekuacioni $\cos x = 0$.

Zgjidhje: Kosinusi ka vlerën zero për vlera të $x = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, ..., \pm k \cdot \pi + \frac{\pi}{2}$ ku $k \in Z$.

Shembulli 4. Të zgjidhen ekuacionet:

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\cos 2x = \frac{1}{2}$

Zgjidhje

a) Me parë kemi treguar se $\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dhe $\cos(180^0 - 45^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Andaj kemi : $x = k \cdot 360^0 + 45^0$ ose $x = k \cdot 360^0 + 135^0$, $k \in Z$.

b) Nga tabela trigonometrike, shohim që 2 kënde që e kanë kosinusin $\frac{1}{2}$ janë 60^o dhe $(360^0 - 60^0) = 300^0$ andaj shkruajmë: $2x = k \cdot 360^0 + 60^0$ ose $x = k \cdot 180^0 + 150^0$, $k \in Z$..

Zgjidhja e ekuacionit $tg\, x = c$

Për të zgjidhur ekuacionin $tg\, x = c$ kur $-\infty \le c \le +\infty$ veprojmë kështu:

1. Gjejmë një kënd α, që e ka kosinusin vlerën e barabartë me *c* (me tabelë ose kalkulator).
2. Të gjitha zgjidhjet e ekuacionit $tg\, x = c$ janë $x = k \cdot 180^0 + \alpha$ ose $x = k \cdot 360^0 - \alpha$, ku $k \in Z$.

Shembull 5. Të zgjidhet ekuacioni $\tan x = 0$.

Zgjidhje:

Tangjenti ka vlerën zero për vlera të $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ..., \pm k\pi$ ku $k \in Z$.

Shembulli 6. Të zgjidhen ekuacionet:

a) $tg\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=1$, b) $tg\,3x=\sqrt{3}$

Zgjidhje:

a) Një kënd që ka tangjentin 1 është 45^0 pra $\frac{\pi}{4}$ andaj

$tg\,x=tg\,\frac{\pi}{4}$, kemi $tg\left(\pi x+\frac{\pi}{4}\right)=tg\left(k\pi+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \pi x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow x=\frac{2\cdot k\pi}{\pi}\Rightarrow x=2k$, $k\in Z$.

b) Një kënd që ka tangjentin $\sqrt{3}$ është 60^0 pra $\frac{\pi}{3}$ andaj, kemi $3x=\frac{\pi}{3}+k\pi\Rightarrow\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in Z$.

Zgjidhja e ekuacionit $ctg\,x=d$

Për të zgjidhur ekuacionin $ctg\,x=d$ kur $-\infty\le c\le+\infty$ veprojmë kështu:

1. Gjejmë një kënd α, që e ka kosinusin vlerën e barabartë me *d* (me tabelë ose kalkulator).
2. Të gjitha zgjidhjet e ekuacionit $ctg\,x=d$ janë $x=k\cdot180^0+\alpha$, ku $k\in Z$.

Shembull 7. Të zgjidhet ekuacioni $ctg\,x=0$.

Zgjidhje: Kotangjenti ka vlerën zero për vlera të $x=0,\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},...,\pm k\cdot\pi+\frac{\pi}{2}$ ku $k\in Z$.

Shembull 8. Të zgjidhen ekuacionet:

a) $3ctg\,2x=\sqrt{3}$, b) $ctg\left(-\frac{x}{2}\right)=-1$.

Zgjidhje:

a) Ekuacionin e dhënë $3ctg\,2x=\sqrt{3}$ e pjesëtojmë me 3 fitojmë $ctg\,2x=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Një kënd që ka kotangjenten $\frac{\sqrt{3}}{3}$ është $\frac{\pi}{3}$, *ose* (60^0) andaj $ctg\,2x=ctg\,\frac{\pi}{3}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

b) Nga e dhëna kemi:

$ctg\left(-\frac{x}{2}\right)=ctg\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow-\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}+k\pi\Rightarrow x=-\frac{3\pi}{2}-2k\pi$ ka $k\in Z$.

Zgjidhja e ekuacionit e formës

$a\cdot\sin^2 x+b\cdot\sin x+c=0$, $a\cdot\cos^2 x+b\cdot\cos x+c=0$, $a\cdot tg^2x+b\cdot tg\,x+c=0$ dhe $a\cdot ctg^2x+b\cdot ctg\,x+c=0$

Për të zgjidhur ekuacionin merret barazimi $\sin x = t$ apo $\cos x = t$, $tg\, x = t$, $ctg\, x = t$. Fitohet ekuacion kuadratik

$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$. Pas zgjidhjes së ekuacionit kuadtaik shndërrohet si në ekuacionet e formës: A, B, C dhe D.

Shembull 9. Të zgjidhen ekuacionet:

a) $\sin^2 x + \sin x = 0$ b) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

Zgjidhje. a) Zëvendësojmë $\sin x = t$, fitojmë $t^2 + t = 0$ zgjidhjet e ekuacionit kuadratik të fituar janë $t = 0 \ \wedge \ t = -1$. Kemi $\sin x = 0$ që vlerat e x janë $x = k\pi,\ k \in Z$ dhe $\sin x = -1$ që vlerat e x janë $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$. Përfundimisht bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit të dhënë është $x \in \left\{ k\pi, -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \right\},\ k, n \in Z$.

b) Zëvendësojmë $\cos x = t$, fitojmë $2t^2 - 3t + 1 = 0$, zgjidhjet e të cilit janë $t = \frac{1}{2} \ \wedge \ t = 1$. Ku $\cos x = \frac{1}{2} \wedge \cos x = 1$. Bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit të dhënë është $x \in \left\{ 2k\pi, \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi \right\},\ k, n \in Z$.

Shembull 10. Të zgjidhet ekuacioni: $\sin 2x + \sin x = 0$.

Zgjidhje. Me që $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$ kemi $2\sin x \cdot \cos x + \sin x = 0$ andaj kemi $\sin x \cdot (2\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \wedge 2\cos x + 1 = 0$

$x = k\pi,\ k \in Z$ dhe $\cos x = -\frac{1}{2}$ kemi $x \in \left\{ \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \right\}, n \in Z$. Bashkësia e zgjidhjeve është $x \in \left\{ k\pi, \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi \right\},\ k, n \in Z$.

Zgjidhja e ekuacionit e formës $a\sin x + b\cos x = c$

Zgjidhja e ekuacionit të llojit të tillë zgjidhet duke zëvendësuar $tg\,\frac{x}{2} = t$, prej nga fitojmë: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \wedge \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, andaj kalojmë në formën e ekuacionit të formës E.

Shembull 11. Të zgjidhet ekuacioni: $2\sin x - \cos x = 0$.

Zgjidhje. Marrim zëvendësimet $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \wedge \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, kemi

$$2\cdot\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=0 \Rightarrow 4t^2+1-t^2=0 \Rightarrow 3t^2+1=0 \Rightarrow \ldots$$

Shembull 12. Të zgjidhet ekuacioni: $\frac{3}{2}\sin 3x + 2\cos 3x = \frac{3}{2}$.

Zgjidhje. Marrim zëvendësimin $3x = u$ dhe $tg\,\frac{u}{2} = t$, andaj kemi $tg\,\frac{3x}{2} = t$, atëherë kemi $\sin 3x = \frac{2t}{1+t^2} \wedge \cos 3x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, kemi $7t^2 - 6t - 1 = 0$ ku ka zgjidhje $t = 1 \wedge t = -\frac{1}{7}$, $tg\,\frac{3x}{2} = 1$ dhe $tg\,\frac{3x}{2} = -\frac{1}{7}$ andaj $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ x = \frac{2}{3}arctg\left(-\frac{1}{7}\right) + \frac{2k\pi}{3},\ k \in Z.$

Zgjidhja e ekuacionit e formës $a\cdot\sin^2 x + b\cdot\sin x\cos x + c\cdot\cos^2 x = 0$

Zgjidhja e ekuacionit të llojit të tillë zgjidhet duke pjesëtuar me $\cos x$ prej nga fitojmë forma e ekuacionit të formës E.

Shembull 13. Të zgjidhet ekuacioni:

$$\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 5\cos^2 x = 0.$$

Zgjidhje. Ekuacionin e dhënë e pjesëtojmë me $\cos^2 x$, prej nga fitojmë $tg^2 x + 4tg\,x - 5 = 0$, poashtu zëvendësojmë $tg\,x = t$, fitohet ekuacioni $t^2 + 4t - 5 = 0$ zgjidhjet e të cilit janë $t = 1 \wedge t = -5$ përfundimisht ekuacioni ka zgjidhje

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ x = arctg(-5) + k\pi,\ k \in Z.$$

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësit, bazuar nga ajo që prezantoi mësimdhënësi zgjidhin ekuacionet të ndryshme trigonometrike.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 2.4.6.8.10.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se si zgjidhen ekuacionet trigonometrike. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema 3.4. EKUACIONET DHE INEKUACIONET TRIGONOMETRIKE

Njësia mësimore 3.4.2. Inekuacionet trigonometrike

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: 3.4. PARAQITJA GRAFIKE E FUNKSIONEVE	**Rezultati i të nxënit të temës:** Nxënësi:		

TRIGONOMETRIKE	1. Shqyrton dhe paraqet grafikisht funksione të ndryshme trigonometrike; 2. Gjen periodën e funksionit trigonometrik; 3. Përkufizon funksionet e anasjelltë trigonometrike.
Njësia mësimore: 3.4.2. Inekuacionet trigonometrike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Zgjidh inekuacionet trigonometrike $\sin x > 0$, $\sin x < 0$ $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\tan x > a$, $\tan x < a$ dhe $\cot x > a$ $\cot x < a$.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi

1. Kuptojnë konceptin e funksionit trigonometrik dhe përdorin simbolet.
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe grafik për funksionit trigonometrik përmes studimit të marrëdhënieve të dy ndryshoreve;
3. Zbaton procedura algjebrike në transformimet e shprehjeve dhe zgjidhjen e ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike;
4. Paraqet grafikisht dhe analizon funksionet dhe inversin për funksione trigonometrike.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, duke diskutuar për zgjidhjen e inekuacioneve trigonometrike.

Fjalët kyçe: inekuacion trigonometrik

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
Të zgjidh inekuacionet trigonometrike: $\sin x > 0$, $\sin x < 0$ $\cos x > a$, $\cos x < a$, $\tan x > a$, $\tan x < a$ dhe $\cot x > a$ $\cot x < a$.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zgjidh inekuacionet trigonometrike.

Mësimdhënësi:

1. Çka quhet inekuacion?
2. Si mund ta bëni lidhjen në mes të ekuacioneve dhe inekuacioneve trigonometrike?
3. Kush po e shënon në tabelë inkuacionet trigonometrik?

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

4.2. Inekuacionet trigonometrike

Mësimdhënësi: Të zgjidhet një inekuacion trigonometrik do të thotë të gjenden të gjitha vlerat reale të panjohurës që e plotëson inekuacionin. Vlerat e të panjohurës quhen zgjidhje të inekuacionit trigonometrik.

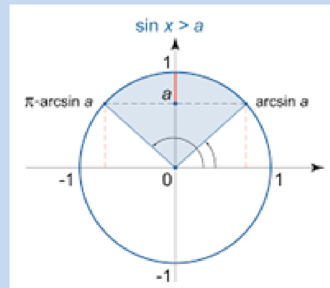


Fig.3.32

A. Inekuacioni $\sin x > a$ dhe $\sin x < a$

Nëse vlera $a > 1$, inekuacioni nuk ka zgjidhje sepse $-1 < a < +1$.
Nëse vlera $a < -1$, inekuacioni ka zgjidhje sepse $(-\infty, +\infty)$.
Nëse vlera $-1 \le a \le +1$, inekuacioni ka zgjidhje (Fig.3.32):

$$(\arcsin a + 2k\pi) < x < (\pi \arcsin a + 2k\pi),\ k \in Z$$

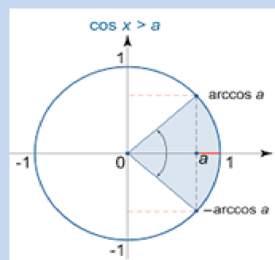


Fig.3.33

B. Inekuacioni $\cos x > a$ dhe $\cos x < a$

Nëse vlera $a > 1$, inekuacioni nuk ka zgjidhje sepse $-1 < a < +1$.
Nëse vlera $a < -1$, inekuacioni ka zgjidhje sepse $(-\infty, +\infty)$.
Nëse vlera $-1 \le a \le +1$, inekuacioni ka zgjidhje:

$$(-\arccos a + 2k\pi) < x < (\arccos a + 2k\pi),\ k \in Z$$

(fig.3.33).

C. Inekuacioni $tg\, x > a$ dhe $tg\, x < a$

Për $tg\, x > a$ inekuacioni ka zgjidhje:

$$(arctg\, a + k\pi) < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$$

Për $\tan x < a$ inekuacioni ka zgjidhje:

$$-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < (arctg\, a + k\pi),\ k \in Z.$$

D. Inekuacioni $ctg\, x > a$ dhe $ctg\, x < a$

Për $ctg\, x > a$ inekuacioni ka zgjidhje:

$$k\pi < x < (arcctg\, a + k\pi),\ k \in Z\ .$$

Për $ctg\ x < a$ inekuacioni ka zgjidhje:

$$(arcctg\, a + k\pi) < x < \pi + k\pi,\ k \in Z\ .$$

Shembull 10. Të zgjidhet inekuacioni $\sin x > 0.709$

Zgjidhje. Duke shfrytëzuar kalkulatorin kemi se vlerat e x-it janë

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

Shembull 11. Të zgjidhet inekuacioni $\sin x > \frac{1}{2}$

Zgjidhje. Duke shfrytëzuar kalkulatorin (fig.3.34) kemi se vlerat e x-it janë

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \ k \in Z.$$

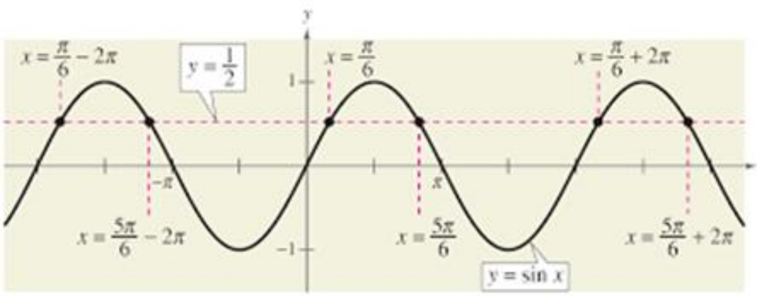


Fig.3.34

Shembull 12. Të zgjidhet inekuacioni: $\sin x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Zgjidhje. Vlerat x për sinus më të mëdhenj se $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, janë

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right],\ k \in Z$$

Shembull 13. Të zgjidhet inekuacioni: $\cos 2x > \frac{1}{2}$

Zgjidhje. Lexo zgjidhjet në grafikën (fig.3.35).

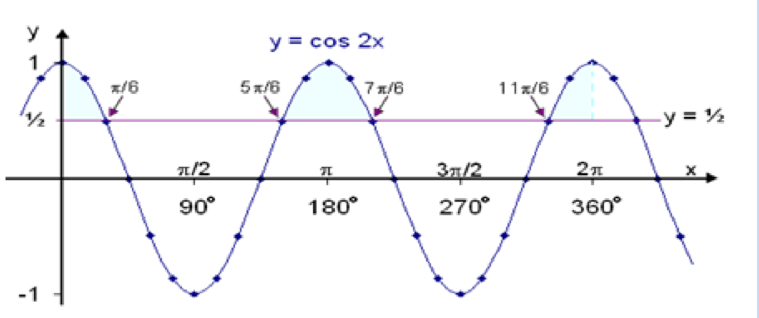


Fig.3.35

Shembull 14. Të zgjidhet inekuacioni $2\cos 2x - 1 > 0$

Zgjidhje. Rregullojmë inekuacionin:

$$2\cos 2x - 1 > 0 \Rightarrow \cos 2x > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z \Rightarrow$$

$$-\frac{\pi}{6} + k\pi < x < \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$$

Shembull 15. Të zgjidhet inekuacioni $tg\, x > 1$

Zgjidhje . Nga se $arctg\, x = \frac{\pi}{4}$, atëherë $\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$.

Shembull 16. Të zgjidhet inekuacioni $3tg\,(4x - \frac{\pi}{5}) + \sqrt{3} \geq 0$

Zgjidhje**.** Fillimisht e rregullojmë ekuacionin $tg\,(4x - \frac{\pi}{5}) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$arctg\,(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = -\frac{\pi}{6} \Rightarrow \quad -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq 4x - \frac{\pi}{5} < \frac{7\pi}{10} + k\pi \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{120} + \frac{k\pi}{4} \leq x < \frac{7\pi}{40} + \frac{k\pi}{4}k\pi,\ k \in Z.$$

Shembull 17. Të zgjidhet inekuacioni $3ctg\,2x + \sqrt{3} \leq 0$

Zgjidhje. Fillimisht e rregullojmë ekuacionin $3ctg\,2x \leq -\sqrt{3} \Rightarrow ctg\,3x \leq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ku $\frac{2\pi}{3} + k\pi \leq x < \pi + k\pi \Rightarrow$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}.$$

c. Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve, bazuar nga ajo që prezantoi mësimdhënësi, janë në gjendje t`i zgjedhin inekuacionet trigonometrike të ndryshme.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli 12, 14, 16.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se si zgjidhen inekuacionet trigonometrike. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por të ketë një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

KAPITULLI **4. ALGJEBRA VEKTORIALE**

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: **4.1. Kuptimet themelore mbi vektorë**

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 4. VEKTORËT</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Përkufizojë vektorin si segment të orientuar;
2. Përkufizon vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt;
3. Identifikojë sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale;
4. Përcaktojë projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz;
5. Përcaktojë koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur;
6. Përcaktojë koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit;
7. Gjejë gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata;
8. Kryejë shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinat;
9. Shprehë cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave;
10. Njehsojë prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve;
11. Interpretojë në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 4.1. Kuptimet themelore mbi vektorët</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përkufizon madhësinë skalare , madhësinë vektoriale dhe disa karakteristika të madhësive vektoriale.
2. Përkufizon madhësinë e dy vektorëve, vektorët e lidhur, të lirë, zero vektorin dhe vektorin e kundërt.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;</td></tr>
</table>

3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar madhësitë skalare dhe vektoriale dhe të zbatoi vektorët në situata reale.

Fjalët kyçe: skalarë, vektorial, orientim

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizojë skalarin si madhësi numerike dhe vektorin si madhësi gjeometrike;
2. Të jep kuptimin e orientimit, madhësisë, pozitës dhe lidhjes së vektorëve.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të vizatojnë një segment. Të caktoj orientim dhe ta shënoi, poashtu të dallojë madhësitë skalare dhe ato vektoriale, çka është vektori i kundërt e çka është zero vektori, të identifikoi se kur dy vektorë janë të barbarë

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka është drejtëza?
2. Çka është segmenti dhe si shënohet?
3. *Nëse lexohet segmenti nga pika e fillimit ka pika e mbarim dhe anasjelltas . Etj.*

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi përkufizon

Përkufizimi 1. *Madhësia, që përcaktohet plotësisht nga vlera e saj numerike, quhet madhësi* ***skalare*** (nga fjala latine *skala – shkallë*). P.sh: gjatësia, syprina, vëllimi, masa, temperatura etj. janë madhësi skalare. Çdo numër real quhet *skalar*.

Ka madhësi të cilat nuk mund të përkufizohen vetëm me një numër.

Përkufizimi 2. *Madhësia, që përcaktohet me masën numerike, kahen dhe drejtimin, quhet* ***madhësi vektoriale*** (nga fjala latine *veho– tërhiq*). P.sh: forca, zhvendosja, shpejtësia, nxitimi etj. janë madhësi vektoriale. Madhësitë vektoriale në matematikë paraqiten me vektor.

Në gjeometri vektori paraqitet me anë të segmentit me shigjetë, në njërin skaj të tij, fig.6.1.

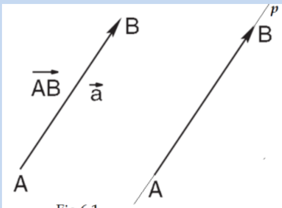


Fig.6.1

Shigjeta tregon *orientimin* e vektorit. Thuhet se segmenti në fig.6.1 është i orientuar në drejtim të shigjetës, do të thotë prej *A* kah *B*. Pika *A* quhet *pikë e fillimit* (*origjina*), ndërsa pika *B* quhet *pikë e mbarimit*. Çdo vektor i përket vetëm një drejtëze, kjo drejtëz paraqet drejtimin e vektorit dhe quhet *bartëse e vektorit.* (Përndryshe, drejtimin mund ta përkufizojmë si bashkësi të drejtëzave paralele).

Përkufizimi 3. *Segmenti i përcaktuar me gjatësi, drejtim dhe me kah quhet* ***vektor.***

Simbolikisht vektori shënohet $\overrightarrow{AB}$ dhe lexohet "vektori AB", ose $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$.

Elementet përcaktuese të një vektori $\overrightarrow{AB}$ janë:

1. Drejtimi i vektorit (drejtëza e cila e përmban vektorin).
2. Kahu i vektorit (orientimi i shigjetës, *A* kah *B*).
3. Gjatësia e vektorit është gjatësia e segmentit [AB] e simbolikisht shënohet $|\overrightarrow{AB}|$ ose $|\vec{a}|$ dhe quhet *modul* (*intensitet*) i vektorit.

Përkufizimi 4. *Dy vektorë* $\overrightarrow{AB}$ *dhe* $\overrightarrow{CD}$ *janë* ***të barabartë****, nëse kanë: gjatësi të barabarta, drejtim dhe kah të njëjtë. Shënohen* $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Shembulli 1. Është dhënë paralelogrami ABCD si në fig. 6.2. Cilët vektorë janë të barabartë.

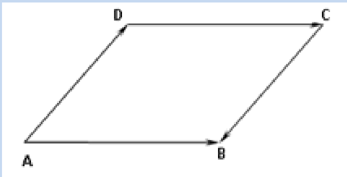


Fig.6.2

Zgjidhja: Vektori $\overrightarrow{AB}$ është i barabartë me vektorin $\overrightarrow{DC}$. Pse? Vektori $\overrightarrow{AD}$ nuk është i barabartë me vektorin $\overrightarrow{CB}$. Sepse kanë gjatësi të barabartë, por kanë kah të kundërt.

Vektori te i cili moduli i tij është i barabartë me zero, quhet *zero vektor* dhe shënohet $\vec{0}$ ose $\overrightarrow{AA}$.

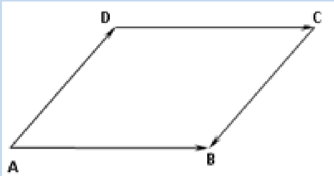


Fig.6.3

Vektori i cili ka gjatësi të barabartë me vektorin $\vec{a}$, ka drejtim të njëjtë me të dhe ka kah të kundërt me vektorin $\vec{a}$, quhet *vektor i kundërt* i vektorit $\vec{a}$ dhe shënohet me $-\vec{a}$.

Për shembull: Vektori i kundërt i vektorit $\overrightarrow{AB}$ është vektori $\overrightarrow{BA}$, d.m.th. $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Po ashtu, vektori i kundërt i vektorit zero $\vec{0}$ është zero vektori.

Shembulli 2. Është dhënë paralelogrami *ABCD*, fig.6.3. Cilët vektorë janë të kundërt?

Zgjidhja: Vektori $\overrightarrow{CB}$ është i kundërt me vektorin $\overrightarrow{AD}$. Pse?

Vektorët sipas pozitës së tyre në rrafsh (hapësirë) klasifikohen në tri lloje:

1. *Vektorët e lidhur për pikë*, quhen ata vektorë që kanë origjinë të përbashkët (si të tillë nuk mund të zhvendosen) fig.6.4.

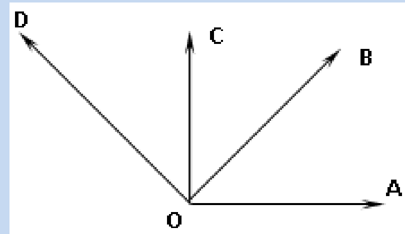


Fig.6.4

2. *Vektorët e lidhur për drejtëz* quhen ata vektorë që kanë të njëjtën bartës, fig.6.5.

3. *Vektorët e lirë* quhen ata vektorë të cilët nuk janë as të lidhur për pikë as nuk kanë bartës të njëjtë, fig.6.5.

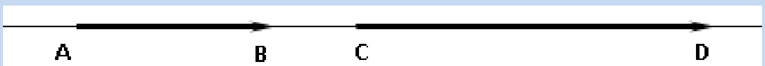


Fig.6.5

Boshti dhe madhësia vektoriale në bosht

Përkufizimi 5. Bosht quhet drejtëza, në të cilën është përcaktuar një drejtim.

Në qoftë se një vektor shtrihet në bosht, atëherë *madhësi* (*vlerë algjebrike*) e vektorit quhet numri që është i barabartë me gjatësinë e vektorit të marrë me shenjën plus, kur drejtimi i vektorit puthitet me drejtimin e boshtit dhe me shenjën minus, kur drejtimi i vektorit është i kundërt me atë të boshtit, fig. 6.6.

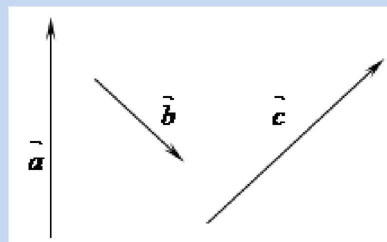


Fig.6.7

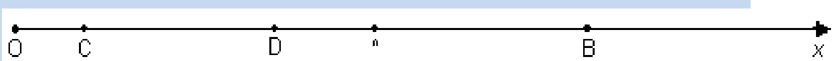


Fig.6.8

Përkufizimi 6. Koordinatat e vektorit M_1M_2 janë të barabarta me ndryshimin e koordinatave përkatëse të ekstremitetit dhe origjinës së tij.

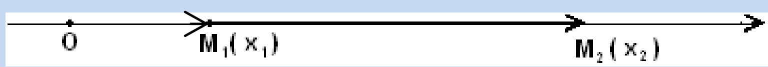


Fig. 6.9

Nga fig.1.11 kemi $\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$ prej nga $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$. Dhe meqë $\overrightarrow{OM_1}=x_1$ dhe $\overrightarrow{OM_2}=x_2$, atëherë $\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|=d(M_1,M_2)=x_2-x_1$.

Shembulli 3. Janë dhënë pikat $M_1(3)$, $M_2(8)$. Sa është

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = d(M_1, M_2) = x_2 - x_1\,?$$

Zgjidhja: Pra, $|M_1M_2| = d(M_1, M_2) = x_2 - x_1 = 8 - 3 = 5$, fig.6.10.

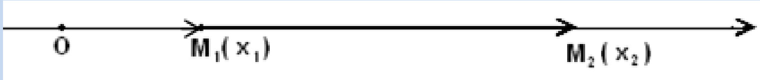


Fig.6.10

c. *Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura* *(punë e pavarur ose në grupe)*
Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se:Vektori kuptohet si segment i orientua. Orientimi i vektorit përcaktohet me shigjetë se se pika e parë e segmentit është fillimi ndërsa pika e mbarimit është mbarimi i shigjetës. Vektorët mund të jenë të lidhur për një pikë apo drejtëze. Vektorët që nuk janë të lidhur janë të lirë, vektorët mund të bartën paralel dhe mund të lidhen. Distanca e dy pikave (e fillimit dhe mbarimit) është gjatësisë e vektorit apo vet gjatësia e segmentit.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: 4. 2. Veprimet me vektorë

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 4. VEKTORËT</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Përkufizon vektorin si segment të orientuar;
2. Përkufizon vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt;
3. Identifikon sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale;
4. Përcakton projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz;
5. Përcakton koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur;
6. Përcakton koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit;
7. Gjen gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata;
8. Kryen shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinat;
9. Shpreh cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave;
10. Njehson prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve;
11. Interpreton në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 4. 2.
Veprimet me vektorë</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Kryen veprimet me vektor;</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.</td></tr>
</table>

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për vektorin dhe veprimet me vektor dhe të zbatoi veprimet me vektor në situata reale.

Fjalët kyçe: mbledhja e vektorëve, zbritja e vektorëve, shumëzimi me skalar, vektori njësi

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të kryen veprimet me vektor: mbledhjen, zbritjen dhe shumëzimin me skalar;

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të vizatojnë një segment. Të caktoj orientim dhe ta shënoi, poashtu të dallojë madhësitë skalare dhe ato vektoriale, çka është vektori i kundërt e çka është zero vektori, të identifikoi se kur dy vektor janë të barabartë.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Si bëhet lidhja e vektorëve? Një nxënës e vizaton në tabelë lidhjen në një pikë e një tjetër bënë lidhjen pikën e mbarimit të vektorit të parë me pikën e fillimit të vektorit të dytë. Një nxënës tjetër bënë me pikën e fillimit të vektorit të parë me pikë e mbarimit me atë të vektorit të dytë.

Mbledhjen e vektorëve

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi përkufizon

Përkufizimi 1. *Mbledhja e dy vektorëve të lidhur $\overrightarrow{OA}$ dhe $\overrightarrow{AB}$ quhet vektori $\overrightarrow{OB}$, fillimi i të cilit puthitet me fillimin e vektorit të parë, ndërsa fundi puthitet me fundin e vektorit të dytë.*

Nga përkufizimi 1, kemi: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ shuma e vektorit $\vec{a}$ me vektorin $\vec{b}$ është vektori $\overrightarrow{OB}=\vec{c}$.
Kjo mënyrë e mbledhjes së vektorëve quhet rregulla e trekëndëshit fig.1.14.
Vektorët, po ashtu, mund të mblidhen edhe me rregullën e paralelogramit që është i dhënë në fig.1.15.
Shuma e një numri të fundmë vektorësh të lidhur, po ashtu, është vektor, fillimi i të cilit puthitet me

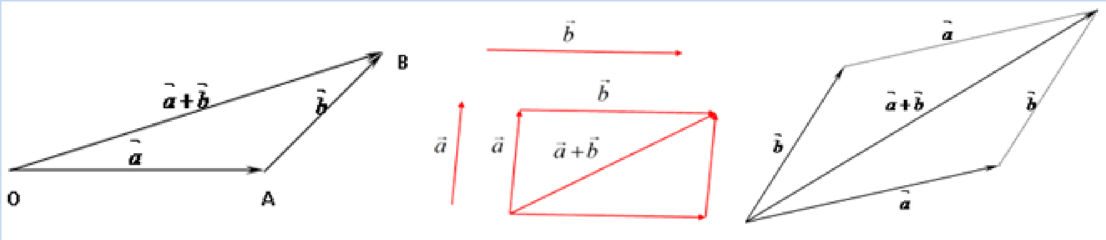


Fig.6.11

fillimin e vektorit të parë, kurse mbarimi puthitet me mbarimin e vektorit të fundit.Mbledhja e më shumë se dy vektorëve.

Për mbledhjen e vektorëve vlejnë këto veti:

1^0 *Vetia komutative*: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

2^0 *Vetia asociative*: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3^0 *Zero vektori* $\vec{0}$: $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

4^0 *Vektori i kundërt*. Për çdo vektor $\vec{a}=\overrightarrow{PQ}$ gjendet vektori i kundërt $-\vec{a}=\overrightarrow{QP}$, atëherë: $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$.

Zbritja e vektorëve

Mësimdhënësi vepron ngjashëm edhe për zbritje

Përkufizimi 2. *Le të jenë dhënë dy vektorë* $\vec{a}$ *dhe* $\vec{b}$. ***Ndryshim (diferencë)*** *i vektorit* $\vec{a}$ *me vektorin* $\vec{b}$ *quhet vektori* $\vec{c}$, *i cili kur të mblidhet me vektorin* $\vec{b}$, *jep vektorin* $\vec{a}$. *Pra,* $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, *nëse* $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$.

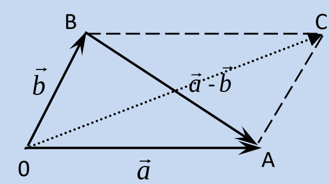


Fig. 6.11

Që të gjendet diferenca $\vec{a}-\vec{b}$, vektorët $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ i bartim në origjinë të përbashkët O, fig.6.11, dhe pastaj i bashkojmë mbarimin e vektorit $\vec{b}$ me mbarimin e vektorit $\vec{a}$. Vektori $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ *meqë* $\vec{b}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}$. Vërejmë që në paralelogramin $OACB$, të ndërtuar mbi vektorët $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ dhe $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, njëra diagonale $\overrightarrow{OC}$ paraqet shumën $\vec{a}+\vec{b}$, ndërsa diagonalja tjetër $\overrightarrow{BA}$ paraqet diferencën $\vec{a}-\vec{b}$ të vektorëve të dhënë.

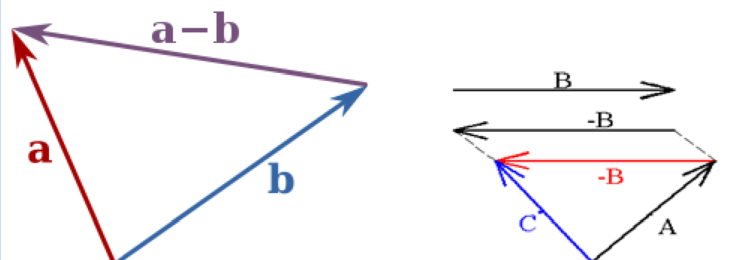


Fig.6.12

Shembulli 1. Është dhënë gjashtëkëndëshi i rregullt $ABCDEF$. Të gjendet vektori i vetëm i shprehur me anë të vektorëve $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}$.

Zgjidhja: Ndërtojmë gjashtëkëndëshin e rregullt $ABCDEF$, fig.6.13.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ meqë $CD // AF$, atëherë $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}$. Rrjedhimisht $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FC}$. Përfundimisht:

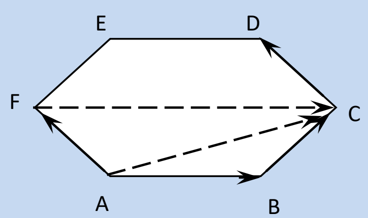


Fig. 6.13

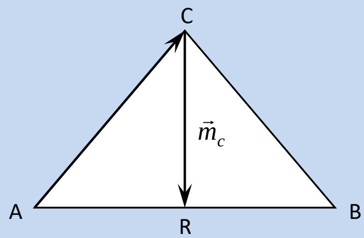


Fig.6.14

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{FC}.$

Shembulli 2. Është dhënë trekëndëshi ABC i tillë që $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b}.$ Të gjendet mediana e lëshuar nga kulmi C, pra $\overrightarrow{m_c}$.

Zgjidhja: Shih fig.6.14, prej nga kemi:

$$\overrightarrow{CR}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c},\ \text{pra}\ \overrightarrow{m_c}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

Shumëzimi i vektorit me skalar

Le të jetë dhënë vektori i çfarëdoshëm $\vec{a}$. Kërkohet të gjendet shuma $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}=3\vec{a}$, fig.6.15.

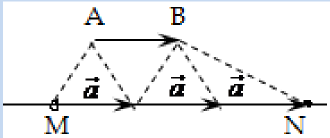


Fig.6.15

Nga fig.6.15 kemi: $\overrightarrow{MN}=3\cdot\overrightarrow{AB}=3\cdot\vec{a}=3\vec{a},$ d.m.th. vektori $\vec{a}$ është shumëzuar me numrin 3.

Përkufizimi 3. ***Shumëzimi i vektorit*** $\vec{a}$ *me skalarin (numrin)* λ*, quhet vektori i ri* $\vec{b}$ *i tillë që:*

1^0 *Ka modul të barabartë me prodhimin e modulit të vektorit* $\vec{a}$ *dhe të vlerës absolute të skalarit* λ*,*

2^0 *Ka kah të njëjtë me vektorin* $\vec{a}$*, nëse* $\lambda > 0$ *dhe kah të kundërt me vektorin* $\vec{a}$ *kur* $\lambda < 0$*,*

3^0 *Është kolinear me vektorin* $\vec{a}$*.*

Rezultati i prodhimit i vektorit $\vec{a}$ me skalarin λ shkruhet:

$$\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \qquad (\vec{a} \neq \vec{0},\ \lambda \neq 0).$$

Për $\vec{a} = \vec{0}$ dhe $\lambda = 0$ nga përkufizimi kemi:

$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, për çdo skalar λ dhe

$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, për çdo vektor $\vec{a}$.

Shembulli 3. Është dhënë vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Të gjendet vektori i ri $\overrightarrow{MN}$, i cili fitohet me shumëzimin e vektorit $\vec{a}$ me skalarin (numrin) -2.

Zgjidhja: Nëse vektori $\vec{a}$ shumëzohet me numrin -1 jep vektorin e kundërt me vektorin $\vec{a}$, d.m.th. $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$, fig.6.16.

Prandaj, $\overrightarrow{MN} = -2\vec{a}$, fig.6.16.

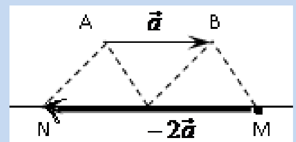


Fig.6.16

Nga përkufizimi i shumëzimit të vektorit me skalar rrjedh që nëse $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, atëherë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë.

Anasjelltas, nëse vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë, atëherë $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Vlejnë këto veti:

1^0	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$	shumëzimi me 1
2^0	$(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$	shumëzimi me -1
3^0	$\lambda \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \lambda$	ligji komutativ
4^0	$(\lambda \cdot \mu)\cdot\vec{a} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{a})$	ligji asociativ
5^0	$(\lambda + \mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{a}$	ligji i parë distributive
5^0	$(\lambda + \mu)\cdot\vec{a} = \lambda\cdot\vec{a} + \mu\cdot\vec{a}$	ligji i parë distributive
6^0	$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a} + \lambda\cdot\vec{a}$	ligji i dytë distributive
7^0	$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$	shumëzimi me 0
8^0	$\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$	shumëzimi me zero- vektor $\vec{0}$

Vektori njësi

Përkufizimi 4. *Vektori moduli i të cilit është i barabartë me njësinë gjatësi, quhet* ***vektor njësi*** *ose* ***ort.***

Çdo vektor $\vec{a}$ mund të shprehet nëpërmjet vektorit njësi që ka po atë kah. Nëse merret vektori

$\vec{a}$ dhe shumëzohet me $\frac{1}{|\vec{a}|}$, fitohet vektori njësi $\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, që e ka kahun e vektorit $\vec{a}$, pra: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0}$.

Ndonjëherë me vektorin njësi $\vec{i}$ jepet njësia e shkallës dhe drejtimi i bushtit $0x$, fig.6.17.

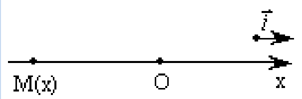


Fig.6.17

Nëse $M(x)$ është një pikë e çfarëdoshme e këtij boshti, atëherë

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i},$$

sepse vektorët $\overrightarrow{OM}$ dhe $x\vec{i}$ kanë module të barabarta $|\overrightarrow{OM}| = |x|$ dhe $|x\vec{i}| = |x|$, janë kolinearë dhe kanë drejtim të njëjtë.

Shembulli 4. Të njehsohet vlera e shprehjes vektoriale:

a) $3(\vec{a} - \vec{b}) - 2(\vec{a} - 3\vec{b}) + \vec{b}$; *b)* $2\vec{a} + (-3\vec{b}) - 2\vec{a} + 4\vec{b}$.

Zgjidhja:

a) $3(\vec{a} - \vec{b}) - 2(\vec{a} - 3\vec{b}) + \vec{b} = 3\vec{a} - 3\vec{b} - 2\vec{a} + 6\vec{b} + \vec{b}$ ligji distributive

$= 3\vec{a} - 2\vec{a} - 3\vec{b} + 6\vec{b} + \vec{b}$ ligji komutativ

$= \vec{a} + 4\vec{b}$. mbledhja

b) Rez. $\vec{b}$.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe se sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna nga ana e nxënësve dhe niveli i saktësisë së përgjigjes.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletoren e ushtrimeve. Libri i nxënësit shembulli 4 dhe 5 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se si bëhet mbledhja e vektorëve (vektori që bashkon pikën e fillimit të vektorit të parë me pikën e mbarimit të vektorit të dytë), zbritja e vektorëve si mbledhje e vektorit të parë me vektorin e kundërt të vektorit të dytë, po ashtu edhe prodhimi me skalar si shumë e disa vektorëve (varësisht nga vlera e skalarit).

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit të orës mësimore e përmes tyre dhe orëtve të tjera arrihen rezultatet e temës.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: 4. 3. Vektorët komplanar

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **r.** ***VEKTORËT***	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Përkufizon vektorin si segment të orientuar; 2. Përkufizon vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt; 3. Identifikon sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale; 4. Përcakton projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz; 5. Përcakton koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur; 6. Përcakton koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit; 7. Gjen gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata; 8. Kryen shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinat; 9. Shpreh cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave; 10. Njehson prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve; 11. Interpreton në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;

Njësia mësimore: 4.3. Vektorët komplanar	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon komplanaritetin e vektorëve 2. Bënë interpretimin gjeometrik të komplenaritetit të vektorëve.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për pozitën e vektorëve në rrafsh.

Fjalët kyçe: komplanaritet i vektorëve

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoi komplanaritetin e vektorëve
2. Të interpreton në formë gjeometrike pozitën e vektorëve në rrafsh.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit që përkufizojë dhe interpretojë pozitën e vektorëve në rrafsh.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Në çfarë pozite mund të jenë vektorët në një rrafsh? (Një nxënës e vizaton në tabelë një rrahsh ose po e imagjinojmë tabelën si rrafsh dhe në te paraqet së paku tre vektor në atë mënyrë që dy të jenë të shtrirë në rrafsh dhe një tjetër që ka vetëm një pikë më rrafshin

Poashtu diskutohet me tërë klasën për pozitën e vektorëve me rrafshin.

b. *Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)*

Mësimdhënësi përkufizon:

Përkufizimi 1. *Vektorët që i takojnë një rrafsh quhen **komplanarë**.*

Çdo dy vektorë janë komplanarë, ndërsa tre e më shumë vektorë të çfarëdoshëm mund të jenë edhe jokomplanarë (nuk bëhet fjalë për zero vektorë).

Vektorët e dhënë $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ le të jenë të tillë që $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ nuk janë jolinearë (nuk i takojnë një drejtëzës). Nëse vektorët $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i bartim në të njëjtin rrafsh dhe të njëjtin fillim O, fig.6.18, dhe nga mbarimi i vektorit $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ heqim drejtëzat $\overline{CM} \,//\, \overrightarrow{OA} = \vec{a}$ gjer në prerje të tyre me drejtëzat $\overline{OA}$ dhe $\overline{OB}$

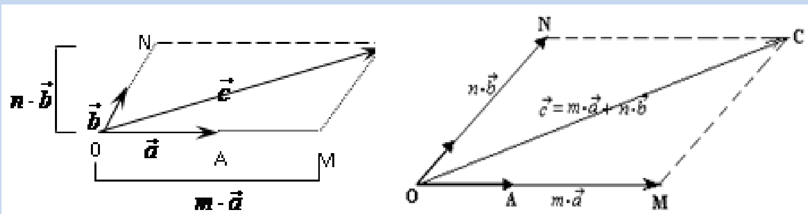


Fig.6.18

në pikat M dhe N. Nga paralelogrami i ndërtuar $OMCN$ gjejmë që: $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$ ose $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Nëse vektori $\vec{c}$ është i paraqitur në trajtën $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, ku asnjëri nga skalarët m dhe n nuk janë zero, atëherë thuhet që vektori $\vec{c}$ është *zbërthyer* (*shprehur*) sipas vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

Vektori $\overrightarrow{OM}$ është komponente e vektorit $\vec{c}$ në drejtim të vektorit $\vec{b}$. Skalarët m dhe n janë koeficient të zbërthimit të vektorit $\vec{c}$ me anë të vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

Shembulli 1. Janë dhënë vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Të paraqiten në formë gjeometrike vektorët:

a) $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, *b*) $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, *c*) $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Zgjidhja: *a*) Shih fig.6.19. *b*) Shih fig.6.20.

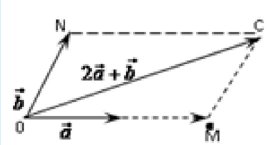


Fig.6.19

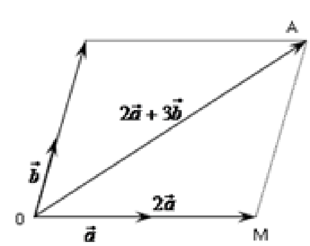


Fig.6.20

Shembulli 2. Nëse pika M është mesi i segmentit AB dhe O pikë e çfarëdoshme jashtë segmentit, të vërtetohet se: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.

Zgjidhja: Shih fig.6.21.

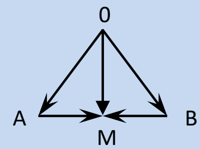


Fig.6.21

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna nga ana e nxënësve dhe niveli i saktësisë së përgjigjes.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletoren e ushtrimeve. Libri i nxënësit shembulli 1 dhe 2 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin dhe rrjedhën e orës mësimore, mësimdhënësi bën në një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se vektorët të cilët i takojnë një rrafshi janë komplana. Poashtu në se vektorët janë koplanar atëherë në mes tyre mund të kryhet veprimet me ta. Këtë mund ta zbatoni edhe në situata të ndryshme nga fushat të tjera.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit të orës mësimore e përmes tyre dhe orëve të tjera arrihen rezultatet e temës.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: 4. 4. Projeksioni i vektorit

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Tema: 4. VEKTORËT</td><td><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Përkufizojë vektorin si segment të orientuar;
2. Përkufizojë vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt;
3. Identifikojë sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale;
4. Përcaktojë projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz;
5. Përcakton koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur;
6. Përcaktojë koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit;
7. Gjejë gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata;
8. Kryejë shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinat;
9. Shprehë cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave;
10. Njehsojë prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve;
11. Interpretojë në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
4. 4. Projeksioni i vektorit</td><td><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Interpreton projeksionin e vektorit.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.</td></tr>
</table>

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për pozitën e vektorëve në rrafsh.

Fjalët kyçe: projeksioni i vektorit

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të interpretoni projeksionin e vektorit në drejtëz dhe në rrafsh në formë gjeometrike dhe analitike.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit që të interpretojë projeksionin e vektorit në drejtëz dhe në rrafsh.

Rejtëzën e dhen?

Shtron disa pyetje. Psh

1. *Kush po e paraqet një drejtëz dhe një vektor jashtë drejtëzës? Pyetje për një nxënës në tabelë por edhe për të gjithë nxënësit në punë të pavarur?*
2. *Lëshoni normale pikën e fillimit dhe të mbarimit të vektorit në dritëz.*
3. *Apo kush po e bartë një vektor të dhënë narmal në*

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi:

Le të jetë dhënë vektori $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, i cili gjendet jashtë rrafshit α. Projeksioni normal i vektorit $\overrightarrow{AB}$ në rrafshin α është vektori $\overrightarrow{A_1B_1}$, ku A_1, B_1 janë projeksionet normale të pikave A dhe B në rrafshin α.

Pra, projeksioni i vektorit në rrafsh përsëri është vektor. Po ashtu, projeksioni i vektorit në drejtëz është vektor.

Por, nëse është dhënë vektori $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ dhe boshti $0x$ me kah të caktuar 0 kah x ose me vektorin njësi $\vec{e}$, atëherë vektori $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{a_x}$ është komponent e vektorit $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ në boshtin $0x$, ku A_1, B_1 janë projeksionet e pikave A, B në boshtin $0x$, fig.6.22.

Projeksioni i vektorit $\vec{a}$ në boshtin $0x$ është numër:

$$pr_{0x}\vec{a} = \pm\left|\vec{a_x}\right|.$$

Shenja plus $(+)$ merret nëse $\vec{a_x}$ ka kah të $\overrightarrow{0x}$, ndërsa kur ka kah të kundërt me $\overrightarrow{0x}$ merret shenja minus $(-)$.

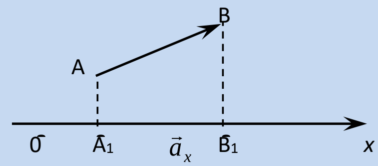


Fig.6.22

Projeksioni i vektorit $\overrightarrow{AB}$ mbi boshtin x jepen me formulën:

$$pr_x\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\phi$$

Shembulli 1. Të gjendet projeksioni i vektorit $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ në boshtin $0x$, nëse: $a)$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $b)$ $\varphi = 2\pi$.

Zgjidhja: $a)$ Nisemi nga:

$$pr_{0x}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot 0 = 0 ,$$

d.m.th. vektori $\overrightarrow{AB}$ është normal në boshtin $0x$, projeksioni i të cilit është pikë, d.m.th. zero-vektor.

$b)$ $pr_{0x}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos 2\pi = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot 1 = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$,

d.m.th. vektori $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ është kolinear me boshtin $0x$.

Shembulli 3. Caktoni projeksionin e vektorit $\overrightarrow{AB}$ në boshtin x, nëse këndi mes vektorit $\overrightarrow{AB}$ dhe boshtit x është $\varphi = 60^0$ dhe $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 8.$

Zgjidhja: Kemi (fig.6.23):

$$pr_{\vec{x}}\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos\varphi = 8 \cdot \cos 60^0 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

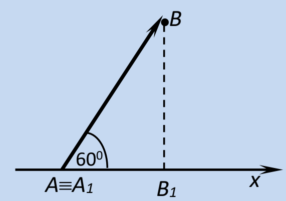


Fig.6.23

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna nga ana e nxënësve dhe niveli i saktësisë së përgjigjes.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletoren e ushtrimeve. Libri i nxënësit shembulli 1 dhe 3 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin dhe rrjedhën e orës mësimore, mësimdhënësi e bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se projeksioni i vektorit është vektor me pikë të fillimit dhe të mbarit janë projeksioni i pikave të vektorit të dhënë. Këtë mund ta zbatoni edhe në situata të ndryshme nga fushat të tjera.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit të orës mësimore e përmes tyre dhe orëve të tjera arrihen rezultatet e temës.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: **4. 5. Trajta koordinative e vektorëve**

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **4. *VEKTORËT***	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Përkufizojë vektorin si segment të orientuar; 2. Përkufizojë vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt; 3. Identifikojë sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale; 4. Përcaktojë projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz; 5. Përcakton koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur; 6. Përcaktojë koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit; 7. Gjejë gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata; 8. Kryejë shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinat;

	9. Shprejë cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave; 10. Njehsojë prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve; 11. Interpretojë në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;
Njësia mësimore: 4.5. Trajta koordinative e vektorëve	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përcakton vektorin përmes kordinatave, në formë analitike dhe gjeometrike.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për paraqitjen e vektorëve përmes koordinave të pikave që e përcaktojnë dhe e paraqesin në formë gjeometirke.

Fjalët kyçe: trajta kordinative e vektorit

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përcaktoni vektorin në trajtën koordinatave dhe gjeometrike në rrafsh dhe hapësirë.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit që përcaktoj vektorin në trajtën koordinatave, ta paraqës në formën analitike dhe gjeometrike në dy dhe tre dimenzional..

Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Shenoni pikën fillestare të sistemit koordinativ (dy dimenzional) [O(0,0)]
2. Le ta merr një nxënës një pikë në rrafsh me koordinata [M(3,4)]
3. Një nxënës del në tabelë dhe i paraqet pikat e dhëna dhe i bashkon ato pika.

b. *Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)*

Mësimdhënësi:

Në sistemin kënddrejtë koordinativ xOy cilido vektor $\vec{v}$ mund të paraqitet me një përfaqësues të tij segment të orientuar $\overrightarrow{OM}$ me fillim në origjinës $O(0,0)$. Le të jenë x dhe y përkatësisht abshisa dhe ordinate e pikës M. Në boshtet Ox dhe Oy le të jenë përkatësisht vektorët njësi $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$.

Çifti i renditur (x, y) paraqet *koordinatat e vektorit* $\vec{v}$ dhe shënohet $\vec{v} = (x, y)$, fig.6.24.

Nga fig.6.24 kemi:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OM}_x + \overrightarrow{OM}_y.$$

Nga ana tjetër $\overrightarrow{OM}_x = x\vec{i}$ dhe $\overrightarrow{OM}_y = y\vec{j}$. Pra:

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Po ashtu është evidente se $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

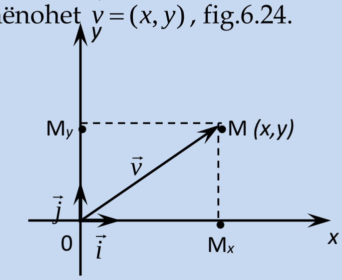


Fig.6.24

Çifti i renditur (x, y) është njëvlerësish i përcaktuar, prandaj pozita e pikave ndaj origjinës së sistemit koordinativ O është njëvlerësish i përcaktuar me vektorët $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}$, që zakonisht quhet *rreze vektor* (*vektor-pozitë*) e pikave ndaj origjinës O.

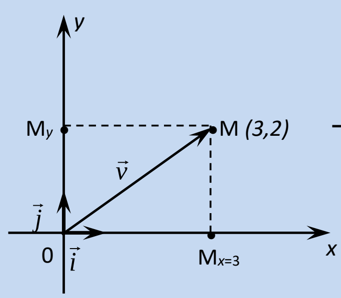


Fig.6.25

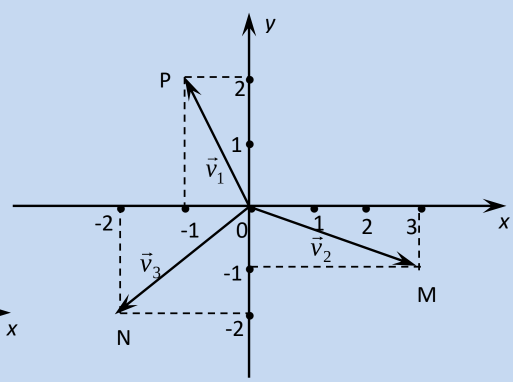


Fig.6.26

Zakonisht shënohet:

$$x = pr_{\vec{i}}\,\vec{a} = a_x \quad \text{dhe} \quad y = pr_{\vec{j}}\,\vec{a} = a_y$$

apo

$$a_x = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\left(\vec{i}, \vec{a}\right) \qquad \text{dhe} \qquad a_y = \left|\vec{a}\right| \cdot \cos\left(\vec{j}, \vec{a}\right),$$

ku a_x dhe a_y janë projeksionet e vektorit përkatësisht në boshtin Ox dhe Oy. Duke u bazuar në këto të dhëna kemi:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

ku a_x dhe a_y janë koordinatat e Dekartit të vektorit $\vec{a}$. Pra, mund të shkruajmë:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

që do të thotë se vektori $\vec{a}$ është shprehur me anë të koordinatave të tij në sistemin koordinativ kënddrejtë të Dekartit. Numrat $x = a_x$ dhe $y = a_y$ quhen *koordinata të rreze-vektorit* të pikës M.

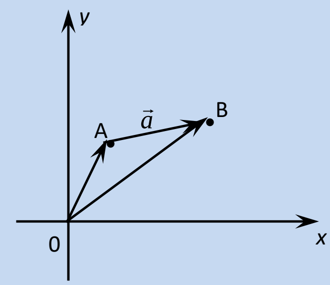


Fig.6.27

Tani në sistemin koordinativ kënddrejtë do të paraqesim vektorin $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, ku $A(x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$ dhe këto janë pika të skajshme të tij, fig.6.27. Vektori është shprehur si diferencë e vektorëve $\overrightarrow{OB}$ dhe $\overrightarrow{OA}$, pra:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

dhe

$$\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}, \qquad \overrightarrow{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j}.$$

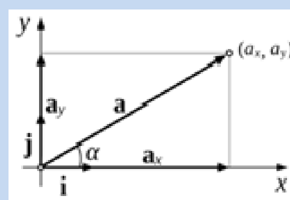


Fig.6.28

Atëherë:

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j},$$

d.m.th.:

$$a_x = x_2 - x_1 \qquad \text{dhe} \qquad a_y = y_2 - y_1.$$

Ndërsa moduli i tij është:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

që paraqet distancën ndërmjet pikave A dhe B.

Rreze-vektori $\overrightarrow{OM}$ i pikës $M(x, y, z)$ shënohet me r. Duke i ditur koordinatat x, y, z të pikës M, mund të gjendet moduli i r i rreze-vektorit $\vec{r}$ dhe këndet α, β, γ që formon ai me boshtet koordinative.

Sipas vetisë së diagonales OM të paralelogramit $OABCM$, fig.6.24, kemi:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Meqë x, y, z janë projeksionet e vektorit $\vec{r}$ mbi boshtet koordinative, atëherë:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{r} \qquad \text{dhe} \qquad \cos\gamma = \frac{z}{r}.$$

Rreze-vektori $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ i pikës $M(x,y,z)$ është vektor-diagonal i paralelogramit $OABM$ të ndërtuar mbi vektorët $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$. Andaj:

$$\vec{r}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},$$

por:

$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i},\ \ \overrightarrow{OB}=y\vec{j},\ \ \overrightarrow{OC}=z\vec{k}.$$

Rrjedhimisht:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Përkufizimi 1. *Projeksionet* x,y,z *të rreze-vektorit* $\vec{r}$ *të pikës* M *mbi boshtet koordinative kënddrejta quhen* ***koordinatat*** *e tij.*

Ndërkaq, projeksioni $|\overrightarrow{OA}|=x$ mbi boshtin Ox quhet *abshisë* e pikës M, projeksioni $|\overrightarrow{OB}|=y$ mbi boshtin Oy quhet *ordinatë* e pikës M dhe projeksioni $|\overrightarrow{OZ}|=z$ mbi boshtin Oz quhet *aplikatë* e pikës M

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna nga ana e nxënësve dhe niveli i saktësisë së përgjigjes.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletoren e ushtrimeve. Libri i nxënësit shembulli 1 dhe 2 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se vektorët mund të paraqiten përveq formave gjeometrike edhe me sistemin koordinativ. Këtë mund ta zbatoni edhe në situata të ndryshme nga fushat të tjera.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit të orës mësimore e përmes tyre dhe orëve të tjera arrihen rezultatet e temës.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe

shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: 4.6. Varësia dhe pavarësia lineare e vektorëve

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Tema: 4. VEKTORËT</td><td><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Përkufizojë vektorin si segment të orientuar;
2. Përkufizojë vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt;
3. Identifikon sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale;
4. Përcaktojë projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz;
5. Përcakton koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur;
6. Përcaktojë koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit;
7. Gjejë gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata;
8. Kryejë shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinata;
9. Shprehë cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave;
10. Njehsojë prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve;
11. Interpretojë në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 4.6.
Varësia dhe pavarësia lineare e vektorëve</td><td><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Interpreton varësin dhe pavarësinë lineare të vektorëve</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;</td></tr>
</table>

4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për varësinë dhe pavarësinë lineare të vektorëve.

Fjalët kyçe: varësia, pa varësia lineare e vektorëve

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të interpretohet varësia dhe pavarësia lineare e vektorëve.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit që përcaktoj varësinë dhe pavarësin lineare e vektorëve, ta paraqës në formën analitike dhe gjeometrike.
Mësimdhënësi:
Shtron disa pyetje. P.sh.

2. Shenoni pikën fillestare të sistemit koordinativ (dy dimenzional) [O(0,0)]
3. Le ta merr një nxënës një pikë në rrafsh me koordinata [M(3,4)]
4. Një nxënës del në tabelë dhe i paraqet pikat e dhëna dhe i bashkon ato pika.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi:

6. Varësia dhe pavarësia lineare e vektorëve

Për vektorët e dhënë $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}$ dhe skalarët $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ shprehja:

$$y = \lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \cdots + \lambda_n \vec{a_n}$$

quhet *kombinim linear i vektorëve.* Nëse $y = 0$, kombinimi linear quhet *kombinim linear zero.*

Përkufizimi 1. *Vektorët* $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_n}$ *quhen* ***linearisht të pavarur****, nëse kombinimi linear zero i tyre është i barabartë me zero:*

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = 0.$$

vlen vetëm për $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$

Në të kundërtën, nëse ekziston kombinimi linear zero

$$\lambda_1 \overrightarrow{a_1} + \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{a_n} = 0,$$

i cili vlen për të paktën njërin nga koeficientet e kombinimit linear $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ *të ndryshëm nga zero, vektorët* $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \cdots, \overrightarrow{a_n}$ *quhen **linearisht të varur.***

Shembulli 1. Dy vektorë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë linearisht të varur, atëherë dhe vetëm atëherë kur ata janë kolinearë.

Zgjidhja: Vërtet, nëse vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë, atëherë njëri prej tyre mund të shprehet si prodhim i vektorit tjetër me një skalar, fig.1.48. Pra: $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}.$ Nga ky barazim marrim:

$$\vec{a} - \lambda \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{ose} \quad \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0,$$

ku $\lambda_1 = 1 \neq 0$, që tregon se vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë linearisht të varur.

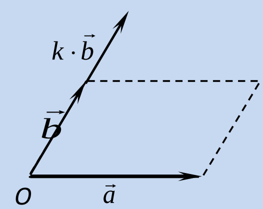


Fig. 6. 29

Anasjelltas, le të jenë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ vektorë linearisht të varur. Atëherë kjo do të thotë se ekziston kombinimi linear zero:

$$\lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} = 0,$$

p.sh. për $\lambda_1 \neq 0.$ Këtë mund ta shkruajmë: $\vec{a} = -\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \vec{b}$, gjë që paraqet shprehje të vektorit $\vec{a}$ me anë të atij $\vec{b}$, ose vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë.

Shembulli 2. Cilët nga vektorët janë kolinearë:

$$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad \vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{p} = \vec{a} + 2\,\vec{b}, \quad \vec{s} = 2\vec{a} + 2\,\vec{b}, \quad \vec{r} = 4\vec{a} + 2\,\vec{b},$$

nëse vektorët $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ janë kolinearë?

Zgjidhja: Nga kolineariteti i vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ kemi:

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}.$$

Andaj, vektorët $\vec{m}$, $\vec{n}$, $\vec{r}$ janë kolinearë, sepse p.sh. vektori:

$$\vec{r} = 4\vec{a} + 2\,\vec{b} \text{ prej nga } \vec{r} = 2\left(2\vec{a} + \vec{b}\right)$$

meqë $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b}$, atëherë:

$$\vec{r} = 2\vec{n},$$

çka do të thotë se vektori $\vec{r}$ u shpreh me anë të vektorit $\vec{n}$.

Tre vektorë $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ *dhe* $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ *janë linearisht të pavarur nëse*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Shembulli 3. Të tregohet se vektorët: $\vec{v_1} = (1,0,0)$, $\vec{v_2} = (1,1,0)$, $\vec{v_3} = (1,1,1)$, janë linearisht të pavarur.

Zgjidhja: Vërtet, marrim determinaten:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 ,$$

.m.th. çfarëdo vektori mund të shprehet si kombinim linear i tyre.

Shembulli 4. Të tregohet se vektorët:

$$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{dhe} \quad \vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}$$

janë linearisht të varur.

Zgjidhja: Vërtet, $\vec{b} = 3\vec{a}$, d.m.th. $3\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$ ose Në sistemin kënddrejtë koordinativ xOy cilido vektor $\vec{v}$ mund të paraqitet me një përfaqësues të tij segment të orientuar $\overrightarrow{OM}$ me fillim në origjinës $O(0,0)$. Le të jenë x dhe y përkatësisht abshisa dhe ordinate e pikës M. Në boshtet Ox dhe Oy le të jenë përkatësisht vektorët njësi $\vec{i}$ dhe $\vec{j}$.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna nga ana e nxënësve dhe niveli i saktësisë së përgjigjes.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletoren e ushtrimeve. Libri i nxënësit shembulli 1 dhe 2 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin dhe rrjedhën e orës mësimore, mësimdhënësi e bën në një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim ta interpretoj varësinë dhe pavarësinë lineare të vëktorëve.

Këtë mund ta zbatoni edhe në situata të ndryshme nga fushat të tjera.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit të orës mësimore e përmes tyre dhe orëve të tjera arrihen rezultatet e temës.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: 4. 7. Produkti skalar i vektorëve

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **4. *VEKTORËT***	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Përkufizojë vektorin si segment të orientuar; 2. Përkufizojë vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt; 3. Identifikojë sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale; 4. Përcaktojë projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz; 5. Përcakton koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur; 6. Përcaktojë koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit; 7. Gjejë gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata; 8. Kryejë shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinata; 9. Shprehë cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave; 10. Njehsojë prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve; 11. Interpretojë në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;
Njësia mësimore: 4.7. Produkti skalar i vektorëve	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:**

	1. Përkufizon produktin skalar të vektorëve 2. Interpreton në formë analitike dhe gjeometrike produktin skalr të vektorëve

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për produktin skalar të vektorëve.

Fjalët kyçe: produkti skalar i vektorëve

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizojë produktin skalar të vektorëve;
2. Të interpretojë në formë analitike dhe gjeometrike produktin skalar të vektorëve.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit që përcaktoi produktin skalar të vektorëve dhe ta paraqes në formën analitike dhe gjeometrike.

Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Si bëhet mbledhja e dy vektorëve?
2. Si bëhet zbritja e dy vektorëve?
3. Si bëhet prodhimi me skalar i vektorit?

4. Çka është moduli i vektorëve dhe si njehsohet?
   Në të gjitha këto pyetje përgjigjet nxënësit i paraqesin në tabelë.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi:

7. Produkti skalar i vektorëve

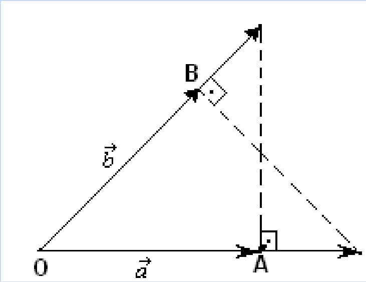


Fig. 6.30

Gjer më tani jemi njohur me tri veprime me vektorë: mbledhjen, zbritjen dhe shumëzimin e vektorit me skalar. Tani do të përkufizojmë edhe produktin skalar të vektorëve.

Le të jenë dhënë vektorët e lirë $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ me pikë fillestare të përbashkët, fig.6.30.

Përkufizimi 1. ***Produkti (prodhimi)*** *skalar i dy vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$, quhet skalari i cili është i barabartë me prodhimin e moduleve (gjatësive) të këtyre vektorëve me kosinusin e këndit ndërmjet tyre.*

Simbolikisht shënohet: $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Pra:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right).$$

Produkti skalar i zero-vektorit $\vec{0}$ me çfarëdo vektori $\vec{a}$, sipas përkufizimit, është numër i barabartë me 0 (zero).

Projeksioni i vektorit $\vec{a}$ në vektorin $\vec{b}$ është:

$$pr_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right),$$

ndërsa projeksioni i vektorit $\vec{b}$ në vektorin $\vec{a}$ është:

$$pr_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{b},\vec{a}\right).$$

Meqë $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\cos\left(\vec{b},\vec{a}\right)$, produkti skalar mund të shkruhet edhe në ketë trajtë:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot pr_{\vec{a}}\vec{b} \qquad \text{ose} \qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\cdot pr_{\vec{b}}\vec{a},$$

që do të thotë se produkti skalar i dy vektorëve është i barabartë me prodhimin e modulit të njërit vektor dhe projeksionit të vektorit tjetër në vektorin e parë.

Shembulli 1. Le të jetë $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=6$, ndërsa këndi ndërmjet vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$ është 60^0. Sa është: *a)* $\vec{a}\cdot\vec{b}$, *b)* $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$, *c)* $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

Zgjidhja: Bazuar në përkufizim të produktit skalar kemi:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=4\cdot6\cdot\cos60^0=24\cdot\frac{1}{2}=12.$

b) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)+\vec{b}\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=16-36=-20$$

(sepse $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}\Rightarrow-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}=0$).

c) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=76.$

Në bazë të përkufizimit të produktit skalar të dy vektorëve mund të njehsohet këndi ndërmjet atyre vektorëve, përkatësisht kosinusi ndërmjet dy vektorëve:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}.$$

Produkti skalar do të jetë pozitiv, nëse $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)>0$, ndërsa negativ kur $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)<0$.

Shembulli 2. Le të jenë dhënë $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ dhe $\left|\vec{a}\right|=5, \left|\vec{b}\right|=2.$ Të gjendet këndi ndërmjet vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$.

Zgjidhja: Shënojmë me φ këndin ndërmjet vektorëve $\vec{a}$ dhe $\vec{b}$. Duke u nisur formula: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi$, kemi:

$$5=5\cdot2\cdot\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{5}{10}\Rightarrow\cos\varphi=\frac{1}{2}\quad\text{apo}\quad\varphi=\arccos\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

Për produktin skalar vlejnë edhe këto veti:

1^0 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$ vetia komutative

2^0 $\left(m\cdot\vec{a}\right)\cdot\left(n\cdot\vec{b}\right)=mn\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right).$ vetia asociative që përmban shumëzim numerik

3^0 $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$ vetia distributive

4^0 Sipas përkufizimit. *Nëse vektorët janë kolinearë, atëherë* $\varphi=0^0$ ose $\varphi=180^0$, rrjedhimisht $\cos\varphi=+1$ dhe $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|.$

Në veçanti, kur $\vec{a}=\vec{b}$,

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\cos0^0=a\cdot a\cdot1=a^2\qquad\text{ose}\qquad a=\sqrt{\vec{a}^2}.$$

Rasti: $\overrightarrow{a_0}\cdot\overrightarrow{a_0}=\left|\overrightarrow{a_0}\right|^2=1.$

5^0 *Nëse vektori* $\vec{a}$ *është normal me vektorin* $\vec{b}$, *atëherë këndi ndërmjet tyre është* 90^0. Prandaj, $\cos\varphi=0$, d.m.th.

$$\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi=0\quad\text{ose}\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Pra:

$$\left(\vec{a}\perp\vec{b}\right)\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

6^0 *Nëse vektorët* $\vec{a}$ *dhe* $\vec{b}$ *jepen me koordinata në sistemin koordinativ:*

$$\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k} \quad dhe \quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},$$

atëherë:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)$$

përkatësisht:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$$

(nga se $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ dhe $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0$.

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$, $\quad \left|\vec{b}\right|=\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.

Prandaj:

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Pse $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$ dhe $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$? Sepse:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{i}\right|\cdot\cos\left(\vec{i},\vec{i}\right)=1\cdot1\cdot\cos0^0=1\cdot1\cdot1=1, \text{ dhe}$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\left|\vec{i}\right|\cdot\left|\vec{j}\right|\cdot\cos\left(\vec{i},\vec{j}\right)=1\cdot1\cdot\cos90^0=1\cdot1\cdot0=0.$$

Kjo më mirë jepet me tabelë:

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Shembulli 3. Të njehsohet produkti skalar i vektorëve $\vec{a}=3\vec{p}+2\vec{q}$ dhe $\vec{b}=\vec{p}+4\vec{q}$, ku $\vec{p}$ dhe $\vec{q}$ janë vektorë njësi normalë.

*Zgji**dhja:*** Meqë $\vec{p}$ dhe $\vec{q}$ janë respektivisht vektorë normalë, kemi:

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=0 \quad \text{dhe} \quad \left|\vec{p}\right|=\left|\vec{q}\right|=1.$$

Prandaj:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(3\vec{p}+2\vec{q}\right)\cdot\left(\vec{p}+4\vec{q}\right)=3\left|\vec{p}\right|^2-2\vec{q}\cdot\vec{p}+12\vec{p}\cdot\vec{q}+8\left|\vec{q}\right|=3+8=11.$$

Shembulli 4. Janë dhënë kulmet e trekëndëshit $A(1,1,1)$, $B(2,2,1)$ dhe $C(2,1,2)$. Të gjendet këndi te kulmi A..

Zgjidhja: Meqë $\overrightarrow{AB}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{AC}=(1,0,1)$, kemi:

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1\cdot1+1\cdot0+0\cdot1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}.$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\angle\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Shembulli 5. Sa është vlera e parametrit λ ashtu që vektorët $\vec{p}=\lambda\vec{a}+17\vec{b}$ dhe $\vec{q}=3\vec{a}-\vec{b}$ të jenë reciprokisht normalë, ku $\left|\vec{a}\right| = 2, \left|\vec{b}\right| = 5$ dhe $\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

Zgjidhja: Që vektorët $\vec{p}$ dhe $\vec{q}$ të jenë reciprokisht normalë, duhet të jetë: $\vec{p}\cdot\vec{q} = 0$. Prandaj:

$$\left(\lambda\vec{a} + 17\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a} - \vec{b}\right) = 0 \qquad \text{ose} \qquad 3\lambda\left|\vec{a}\right|^2 + (51-\lambda)\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} - 17\left|\vec{b}\right|^2 = 0$$

$$12\lambda + (51-\lambda)\cdot 10\cdot\cos\frac{2\pi}{3} - 425 = 0 \Rightarrow \lambda = 40.$$

Shembulli 6. Të gjendet projeksioni i vektorit $\vec{a} = 10\vec{m} + 2\vec{n}$ në vektorin $\vec{b} = 5\vec{m} - 12\vec{n}$, nëse vektorët $\vec{m}$ dhe $\vec{n}$ janë reciprokisht normalë.

Zgjidhja: Kemi: $$pr_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{\left(10\vec{m} + 2\vec{n}\right)\cdot\left(5\vec{m} - 12\vec{n}\right)}{\sqrt{\left(5\vec{m} - 12\vec{n}\right)^2}} = 2.$$

Shembulli 7. Le të jetë $A(1,2,-3)$ pika e fillimit të vektorit $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Të gjenden koordinatat e pikës së mbarimit të vektorit $\vec{a}$.

Zgjidhja: Shënojmë me $B(x,y,z)$ pikën e mbarimit të vektorit të dhënë, pra: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Atëherë:

$$3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} = (x-1)\vec{i} + (y-2)\vec{j} + (z+3)\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} x-1 &= 3 \\ y-2 &= -1 \\ z+3 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 4 \\ y &= 1 \\ z &= 1, \end{aligned}\right.$$

d.m.th. pika e mbarimit të vektorit $\vec{a}$ është pika $B(4,1,1)$.

Shembulli 8. Të vërtetohet se produkti skalar i vektorëve $\vec{a} = 2\vec{i}$ dhe $\vec{b} = -5\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$ është -10.

Zgjidhja: Kemi: $\vec{a}\cdot\vec{b} = -10$.

Shembulli 9. Të caktohet parametri λ ashtu që vektori $\vec{a} = \lambda\vec{i} + (\lambda-1)\vec{j} + (\lambda+1)\vec{k}$ të formoj kënd të barabartë me vektorët $\vec{b} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ dhe $\vec{c} = \vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$.

Zgjidhja: Nga kushtet e dhëna kemi

$$\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \angle\left(\vec{a},\vec{c}\right) \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \cos\left(\vec{a},\vec{c}\right) \Rightarrow \lambda = \frac{634 - 297 - \sqrt{10}}{862}.$$

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna nga ana e nxënësve dhe niveli i saktësisë së përgjigjes.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletoren e ushtrimeve. Libri i nxënësit shembulli 1, 3, 5 dhe 9 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin dhe rrjedhën e orës mësimore, mësimdhënësi e bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se si bëhet prodhimi skalar i vektorëve.

Këtë mund ta zbatoni edhe në situata të ndryshme nga fushat të tjera.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit të orës mësimore e përmes tyre dhe orëve të tjera arrihen rezultatet e temës.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **4. VEKTORËT**

Njësia mësimore: 4.8. Zbatimet gjeometrike të vektorëve

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **4. *VEKTORËT***	Rezultati i të nxënit të temës: Nxënësi do të jetë në gjendje të: 1. Përkufizojë vektorin si segment të orientuar; 2. Përkufizojë vektorët e barabartë, vektorin zero, vektorin njësi dhe vektorin e kundërt; 3. Identifikojë sistemin koordinativ kënddrejtë në rrafsh dhe në hapësirë si sistem prej dy përkatësisht tri boshteve reciprokisht normale; 4. Përcaktojë projeksionin e vektorit në bosht dhe në drejtëz;

<table>
<tr><td></td><td>5. Përcaktojë koordinatat e rreze vektorit si dyshe apo treshe e renditur;
6. Përcakton koordinata e vektorit përmes koordinatave të pikave të skajshme të vektorit;
7. Gjejë gjatësinë e vektorit të dhënë me koordinata;
8. Kryejë shumëzimin e vektorit me skalar, mbledhjen dhe zbritjen e vektorëve të dhënë me koordinata;
9. Shprehë cilindo vektor në rrafsh apo hapësirë si kombinim linear të vektorëve në drejtim të boshteve koordinatave;
10. Njehsojë prodhimin skalar, vektorial dhe të përzier të vektorëve;
11. Interpretojë në mënyrë gjeometrike prodhimin vektorial dhe prodhimin e përzier të vektorëve;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 4. 8.
Zbatimet gjeometrike të vektorëve</td><td>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:
1. Zbaton vektorët në gjeometri dhe në situata të ndryshme.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin për vektorin si segment i orientuar;
2. Përcakton vendndodhjen e vektorëve me anë të koordinatave;
3. Përdorë arsyetimin për veprimet me vektorë të dhënë në formë gjeometrike ose me anë të koordinatave për zgjidhjen e problemeve të ndryshme matematikore apo edhe nga fizika;
4. Analizon modele dhe lojëra që përfshijnë arsyetimin hapësinor me anë të vektorëve, duke përdorur strategjitë e zgjidhjes së problemeve.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për produktin skalar të vektorëve.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fjalët kyçe: zbatimi i vektorëve</td></tr>
<tr><td colspan="2">Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të zbaton vektorët në gjeometri dhe në lëmi të tjera dhe në situata të ndryshme.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:
a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve (rrjeti i komunikimit)
Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur</td></tr>
</table>

qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit që zbatoi vektorët në gjeometri dhe situata të ndryshme.

Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Ku dhe si mund të bëhet zbatimi i vektorëve?

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi:

Shembulli 1. Nëse $ABCD$ është paralelogram dhe nëse $AC \perp BD$, të vërtetohet se $ABCD$ është romboid.

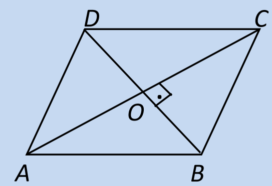


Fig.6. 31

Zgjidhja: I referohemi fig.6.31.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Nga e dhëna $AC \perp BD$, kemi:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ produkti skalar i vektorëve

Tani

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$ ndryshimi i katrorit

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

$0 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$ nga $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$

$\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

D.m.th. paralelogrami $ABCD$ është romboid.

Shembulli 2*. Le të jetë O qendra e rrethit R dhe pika M mesi i kordës AB.

a) Të tregohet se OM është mesi aritmetik i OA dhe OB.

b) Të vërtetohet se $OM \perp AB$.

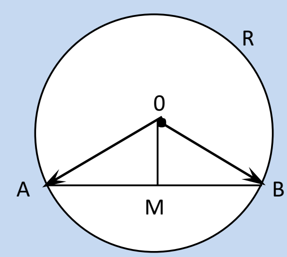


Fig.6.32

Zgjidhja: a) Meqë M është mesi i AB, kemi

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}\\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}\end{aligned}\right\} +$$

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$ meqë M është mesi i AB, $AM = MB$

$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = 0$

$\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

b) Nga fig.1.50 kemi: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Nëse shumëzojmë skalarisht vektorët $\overrightarrow{AB}$ dhe $\overrightarrow{OM}$, kemi:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}-\overrightarrow{OA}\cdot\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$$

$$=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OB}}{2}-\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{2}$$

$$=\frac{0+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}{2}-\frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+0}{2}=\frac{\left|\overrightarrow{OB}\right|^2}{2}-\frac{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2}{2}.$$

Meqë OA dhe OB janë rreze të rrethit, ato janë të barabarta, pra, $OA=OB$. Prandaj, përfundojmë se $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OM}=0$, d.m.th. $OM\perp AB$.

Shembulli 6*. Duke zbatuar vektorët të gjendet syprina e paralelogramit.

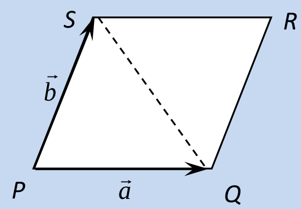


Fig.6.33

Zgjidhja: Është e njohur formula për njehsimin e syprinës së paralelogramit:

$$S=a\cdot b\cdot\sin\varphi,$$

ku a,b janë brinjët e paralelogramit, ndërsa φ këndi që e formojnë ato brinjë.

Shënojmë me $\vec{a},\vec{b}$ brinjët e paralelogramit dhe φ këndin ndërmjet tyre, fig.6.33.

Ngase:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|};\ \ \sin^2\varphi=1-\cos^2\varphi\Rightarrow\sin^2\varphi=1-\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2}.$$

Andaj:

$$S=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi\Rightarrow S^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2\varphi$$

$$S^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\left(1-\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2}\right)=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2;$$

$$S=\sqrt{\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2}.$$

Nëse $\vec{a}=(a_1,a_2)$ dhe $\vec{b}=(b_1,b_2)$, atëherë $S=|a_1b_2-a_2b_1|$.

Shembulli 7. Në pikat $M_1(2,-1)$ dhe $M_2(-5,6)$ janë zbatuar forcat $F_1=4kg$ dhe $F_2=3kg$ të drejtuara në një anë. Të gjendet pika $C(x_c,y_c)$ e zbatimit të rezultateve të tyre R.

Zgjidhja: Detyra e dhënë është problem fizik, por zgjidhja është në aparatin e gjeometrisë analitike që vlen: $\dfrac{M_1C}{CM_2}=\dfrac{3}{4}$, pra $\lambda=\dfrac{3}{4}$. Prandaj:

$$x_c=\frac{2+(-5)\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=-1,\ \ y_c=\frac{-1+6\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}}=2\cdot$$

Pra, forca R është e zbatuar në pikën $(-1,2)$.

Vëmendje: Shembujt i zgjidhin nxënësit në tabelë nën monitorim të mësimdhënësit dhe nxënësit.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna nga ana e nxënësve dhe niveli i saktësisë së përgjigjes.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletoren e ushtrimeve. Libri i nxënësit shembulli 3, 4 dhe 5 . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhës së orës mësimore, mësimdhënësi bën me një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se si bëhet zbatimi i vektorëve në gjeometri.

Këtë mund ta zbatoni edhe në situata të ndryshme nga fushat të tjera.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit të orës mësimore e përmes tyre dhe orëve të tjera arrihen rezultatet e temës.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por të ketë një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

KAPITULLI 5. PËRCAKTORËT

Tema: **5. PËRCAKTORËT**

Njësia mësimore: 5.1. Përcaktorët e rendit të dytë dhe vetitë

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Numri, algoritmet dhe algjebra</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema:5. PËRCAKTORËT

$P = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Përkufizon kuptimin e përcaktorit (determinantit) si vlerë numerike.
2. Njehson vlerën e përcaktorëve të rendit të dytë dhe të tretë me anë të metodave të ndryshme (trekëndëshit, Sarusit,etj.),
3. Zbaton vetitë e përcaktorëve;
4. Shfrytëzon përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura (formulat e Kramerit).</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 5.1. Përcaktorët e rendit të dytë dhe vetitë</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përkufizon përcaktorin dhe jep vetit e tij.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar përcaktorit dhe përvetëson vetitë e tij dhe të zbatoi përcaktorët në situata reale.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Fjalët kyçe:</u> përcaktorë, sistem</td></tr>
<tr><td colspan="4">Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të përkufizoni përcaktorin dhe të interpretoni vetit e tij;</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:</u>
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.</td></tr>
</table>

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj përcaktorët dhe ti përvetësoi vetite e përcaktorëve.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet sistem i ekuacioneve?
2. Të merret një shembull sistem ekuacionesh me dy të panjohura dhe të shënohet në tabelë?
3. Si quhen elementet para të panjohurëst?

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi përkufizon:

Përcaktorët e rendit të dytë dhe vetitë

Sistemi kartor i ekuacioneve lineare me dy të panjohura ka formën

$$\begin{cases} ax+by=\alpha \\ cx+dy=\beta, \end{cases} \qquad (1)$$

ku a,b,c,d quhen koeficientë, ndërsa α dhe β gjymtyrët të lira. Nëse ekuacionin e parë e shumëzojmë me d, të dytin me $-b$ dhe rezultatet i mbledhim, fitojmë:

$$(ad-bc)x=\alpha d-\beta b \qquad (2)$$

Nëse shumëzojmë ekuacionin e parë nga (1) me $-c$ dhe të dytit me a dhe i mbledhim fitojmë

$$(ad-bc)y=\beta a-\alpha c \qquad (3)$$

Nëse $ad-bc\neq 0$, atëherë nga (2) dhe (3) marrim zgjidhjen e sistemit (1)

$$x=\frac{\alpha d-\beta b}{ad-bc} \quad \text{dhe} \quad y=\frac{\beta a-\alpha c}{ad-bc} \qquad (4)$$

Të vërejmë se shprehjet në emërues të zgjidhjeve (4) janë të barabarta me numrin $ad-bc$.
Koeficientët e sistemit (1) i paraqesim në një matricë (tabelë)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Kësaj matrice i shoqërojmë numrin

$$ad-bc=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \qquad (5)$$

që quhet *përcaktor (determinant) i sistemit (1),* ose *përcaktori i rendit të dytë.*

Numrat a,b,c,d quhen *elementet e përcaktorit*, numrat a,c formojnë shtyllën e parë, ndërsa numrat b,d shtyllën e dytë të përcaktorit. Numrat a,b formojnë rreshtin e parë, ndërsa numrat c,d rreshtin e dytë të përcaktorit. Më tej, numrat a,d formojnë diagonalen kryesore, ndërsa numrat b,c diagonalen e dytë të përcaktorit.

Shprehja (5) quhet vlera e përcaktorit të rendit të dytë që fitohet kur nga prodhimi i elementeve në diagonalen kryesore, zbritet prodhimi i elementeve të diagonales e dytë.

Vlera e përcaktorit të (5) paraqet vlerën e emëruesit mga zgjidhjet (4). Ngjashëm mund të shkruhen e numruesit të e zgjidhjeve (4). Kështu zgjidhja e sistemit (1) mund të shkruhet kështu:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad (6)$$

Në emërues të zgjidhjeve x,y të sistemit (1) gjendet përcaktori i atij sistemi. Në numëruesin e të panjohurës së parë (dytë) gjendet përcaktori i cili fitohet me zëvendësimin shtyllës së parë (dytë) me shtyllën e gjymtyrëve të lira.

Në këtë rast, numrat a,b,c,d nga matrica e përcaktorit janë koeficientet e sistemit dhe përmes tyre merret zgjidhja e sistemit. Por, numri-përcaktori i tillë mund të përkufizohet për çfarëdo matrice-tabele katrore të rendit të dytë.

Për çfarëdo tabele katrore të rendit të dytë $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ekziston dhe është i vetëm numri përkatës $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$ që quhet përcaktorë i rendit të dytë.

Barazimi (5) tregon se si njehsohet përcaktori i rendit të dytë.

Psh. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 3=-1-6=-7.$

Duke u bazuar në përkufizimin e përcaktorit mund të vërtetohen këto veti themelore të përcaktorëve:

1^0 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$;

2^0 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$;

Me fjalë: Nëse ndërrojnë vendet shtyllat ose rreshtate përcaktorit, përcaktori ndërron shenjën;

3^0 $\begin{vmatrix} \lambda a & b \\ \lambda c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda b \\ c & \lambda d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \lambda c & \lambda d \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Me fjalë: Faktori i përbashkët i elementeve të një rreshti apo shtylle mund të nxirret para përcaktorit. Apo, përcaktori shumëzohet me një numër, nëse me atë numër shumëzohen elementet e një rresti apo shtylle.

4^0 $\begin{vmatrix} a+\lambda c & b+\lambda d \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Me fjalë: Nëse një rreshti i shtojmë një rresht tjetër të shumëzuar me një skalar, vlera e përcaktorit nuk ndryshon. Njësoj, nëse një shtylle i shtojmë një shtyllë tjetër të shumëzuar me një skalar, vlera e përcaktorit nuk ndryshon.

Shembulli 1. Të njehsohet vlera e përcaktorëve:

a. $|3|$. **b.** $|-5|$. **c.** $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. **d.** $\begin{vmatrix} 99876 & 99877 \\ 99874 & 99875 \end{vmatrix}$.

Zgjidhja.

a. $|3| = 3$. **b.** $|-5| = -5$.

c. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 4 - 3\cdot(-2) = 4+6 = 10$.

d. Që të evitojmë kalkulimet me numra të mëdhenj, shënojmë $x = 99874$. Prandaj, përcaktori merr formën

$$\begin{vmatrix} 99876 & 99877 \\ 99874 & 99875 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x+3 \\ x & x\div 1 \end{vmatrix} = (x+2)(x+1) - x(x+3)$$
$$= x^2 + 3x + 2 - x^2 - 3x$$
$$= 2.$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se: Përcaktori kuptohet si një tabelë me koefixintët të sistemit të ekuacioneve me dy, tri e më shumë të panjohura.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

$$P=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Tema: **5. PËRCAKTORËT**

Njësia mësimore: 5.2. Përcaktorët e rendit të tretë

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Numri, algoritmet dhe algjebra**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **5. PËRCAKTORËT** $P=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Përkufizon kuptimin e përcaktorit (determinantit) si vlerë numerike. 2. Njehson vlerën e përcaktorëve të rendit të dytë dhe të tretë me anë të metodave të ndryshme (trekëndëshit, Sarusit,etj.), 3. Zbaton vetitë e përcaktorëve; 4. Shfrytëzon përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura (formulat e Kramerit).		

Njësia mësimore: 5.2. Përcaktorët e rendit të tretë	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon përcaktorin e rendit të tretë; 2. Zgjidh përcaktorët e rendit të tretë

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar përcaktorit e rendit të tretë dhe të zbatoi përcaktorët në situata reale.

Fjalët kyçe: përcaktorë, sistem, rend i tretë

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni përcaktorin e rendit të tretë;
2. Të zgjidhni përcaktorët e rendit të tretë

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj përcaktorët e rendit të tretë dhe t`i zgjidhë ata.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet përcaktor?
2. Të merret një shembull i përcaktorit të rendit të dytë dhe të zgjidhet në tabelë?

5. Si do të duket një përcaktor i rendit tretë?

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi përkufizon: ***Përcaktorët e rendit të tretë***

Forma e përgjithshme e sistemit të ekaucioneve lienare prej tri ekaucionesh me tri të panjohura ka formën:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = \alpha \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = \beta \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = \gamma, \end{cases} \qquad (7)$$

ku $a_i, b_i, c_i \in R, (i = 1,2,3)$ dhe quhen *koeficientë të sistemit*, kurse $\alpha, \beta, \gamma \in R$ quhen *gjymtyrët e lira të sistemit*. Simbolet x_1, x_2, x_3 quhet të panjohurat e sistemit. Duke vepruar ngjashëm sikurse për zgjidhjen e sistemit (1), gjejmë zgjidhjet x_1, x_2, x_3 të sistemit (7) të cilat janë thyesa që kanë emëruesin e barabartë me

$$a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \qquad (8)$$

Formula (8) mund të shkruhet në formën:

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1).$$

Shprehjet në kllapa mund shkruhen si përcaktor të rendit të dytë përkatësisht:

$$\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \text{ dhe } \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Prandaj shprehja e fundit merr fromën

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Këtë numër e quajmë *përcaktor të rendit të tretë* dhe e shënojmë

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Pra, përcaktori i rendit të retë është numër vlera e të cilit njehsohet me barazimin

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \qquad (8`)$$

ose

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Nga (9) shohim se përcaktori i rendit të tretë është përkufizuar me ndihmën e përcaktorit ë rendit të dytë. Vlera numerike e paraqitur me barazimin (9) quhet përcaktor i *sistemit* (7) ose përcaktor i matricës (tabelës) katore të rendit të tretë

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

e cila është matrica e koeficientëve të sistemit (7).
Edhe numruesit e zgjidhjes së sistemit (7)mund ti shkruajmë si përcaktor të rendit të tretë dhe kështu të gjejmë zgjidhjen e sistemit përmes përcaktorëve
të rendit të tretë. Por, këtë problem do ta trajtojmë më vonë gjatë këtij kapitulli.

1. Më tej, për shkaqe praktike elementet e përcaktorit do ti shënojmë me një shkronjë me nga dy indeksa a_{ij} $(i=1,2,3;\ j=1,2,3)$, ku indeksi i parë i tregon reshtin, ndërsa indeksi i dytë j tregon shtyllën ku ndodhet elementi:
2.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Nëse nga përcaktori D përjashtojmë një rresht dhe një shtyllë, marrim një përcaktor të rendit të dytë. Le të jetë a_{ij} në prerjen e shtyllës dhe të rreshtit të përjashtuar. Atëherë përcaktori i mbetur shënohet me M_{ij} dhe quhet *minori i elementit* a_{ij}. P. sh. për $i=1,\ j=2$ kemi:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

që paraqet minorin e elementit a_{12}.

Komplement algjebrik i elementit a_{ij} quhet prodhimi $(-1)^{i+j}M_{ij}$ dhe shënohet me A_{ij}. Pra:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}. \qquad (13)$$

P.sh.

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Faktori $(-1)^{i+j}$ ka shënjën 1 apo -1, varësisht nga fakti nëse shuma $i+j$ është numër tek apo numër çift. Prandaj, në vend të shënimit $(-1)^{i+j}$ mund të konsiderojmë parashenjat e minorëve për përcaktimin e komplementëve algjebrik sipas tabelës në vijim:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Në bazë të përkufizimit të komplementit algjebrik, relacioni (9) mund të shkruhet:

$$\det A=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3} \qquad (i=1,2,3) \qquad (14)$$

dhe

$$\det A=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j} \qquad (j=1,2,3). \ (15)$$

Shembulli 2. Për përcaktorin $\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}$ gjejmë minorët e shtyllës së parë dhe vlerën e tij.

Zgjidhja.

1. Largojmë rreshtin dhe shtyllën në të cilën gjendet elementi $a_{11} = 4$:

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Prandaj, minori i $a_{11} = 4$ është $M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 7 \cdot 6 - 4 \cdot (-1) = 42 + 4 = 48.$

2. Largojmë rreshtin dhe shtyllën në të cilën gjendet elementi $a_{21} = 2$

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

marrim minorin $M_{21} = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 6 - 5 \cdot (-1) = -42 + 5 = -37..$

3. Largojmë rreshtin dhe shtyllën në të cilën gjendet elementi $a_{31} = 0$

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Marrim minorin $M_{31} = \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 4 - 5 \cdot 7 = -28 - 35 = -63..$

Kështu, njehsimi i vlerës së përcaktorit të rendit të tretë kthehet në përcaktorë të rendit të dytë, duke shumëzuar elementin me minorin përkatës, por duke pasur parasysh shenjën.

Vlera e përcaktorit të dhënë është:

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = +4\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 4[7 \cdot 6 - (-1) \cdot 4] - 2[(-7) \cdot 6 - (-1) \cdot 5 + 0[(-7) \cdot 4 - 7 \cdot 5] \\
&= 4(42 + 4) - 2(-42 + 5) + 0(-28 - 35) \\
&= 4(46) - 2(-37) + 0(-63) \\
&= 184 + 74 + 0 \\
&= 258.
\end{aligned}$$

Pra, vlera e përcaktorit të dhënë është 258.

Rezultati i njëjtë fitohet kur përcaktori i dhënë zbërthehet psh. sipas rreshtit të dytë.

$$\begin{vmatrix} 4 & -7 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-42+5) + 7(24-0) - 4(-4-0)$$
$$= -2(-37) + 7(24) - 4(-4)$$
$$= 74 + 168 + 16$$
$$= 258. \qquad \text{(Rezultati i njëjtë).}$$

Shembulli 3. Me ndihmën e minorëve, të njehsohet e vlera e përcaktorëve:

a. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}$. **b.** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 9 & 19 & 6 \end{vmatrix}$.

Zgjidhja. **a.** Përcaktorin e zbërthejmë sipas shtyllës së parë:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = +3\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-12+4) - 0(-6-2) - 1(-4-4)$$
$$= 3(-8) - 0(-8) - 1(-8) = -24 - 0 + 8 = -16.$$

b. Përcaktorin e zbërthejmë sipas elementeve të shtyllës së dytë:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 9 & 19 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot(-)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} + 19\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -5(6-45) + 3(12-27) - 19(10-3)$$
$$= -5(-39) + 3(-15) - 19(7)$$
$$= 17.$$

c. Përcaktori i rendit të tretë mund të njehsohen edhe me dy rregulla praktike. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli. Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se: Përcaktori i rendit të tretë është një rend më i madh se përcaktori i rendit të dytë, dhe përvetëson zgjidhjen e përcaktorëve të këtij rendi.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

$$P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ \square & e & f \\ \square & h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & \square & f \\ g & \square & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} \square & \square & \square \\ d & e & \square \\ g & h & \square \end{vmatrix}$$
$$= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
$$= aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

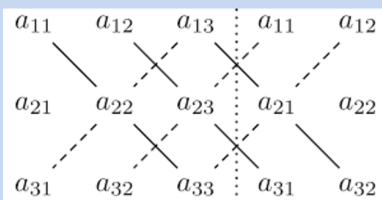
Tema: **5. PËRCAKTORËT**

Njësia mësimore: 5.3. Vetitë e përcaktorëve të rendit të tretë

PLANIT I ORËS MËSIMORE

Fusha kurrikulare:	Koncepti bazë i fushës:	Shkalla e kurrikulës:	Klasa:
MATEMATIKË Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	**Numri, algoritmet dhe algjebra**	**V-të**	**XI-të**

Tema:**5. PËRCAKTORËT**



Rezultati i të nxënit të temës:

Nxënësi do të jetë në gjendje të:

1. Përkufizon kuptimin e përcaktorit (determinantit) si vlerë numerike.
2. Njehson vlerën e përcaktorëve të rendit të dytë dhe të tretë me anë të metodave të ndryshme (trekëndëshit, Sarusit,etj.),
3. Zbaton vetitë e përcaktorëve;
4. Shfrytëzon përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura (formulat e Kramerit)

Njësia mësimore: 5.3. Vetitë e përcaktorëve të rendit të tretë

Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:

1. Përkufizon dhe i zbaton vetit e përcaktoreve të rendit të tretë.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar dhe përvetëson vetitë e tij dhe të zbatoi përcaktorët në situata reale.

Fjalët kyçe: përcaktorë, veti, rendi i tret

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni dhe të interpretoni vetit e përcaktorit të rendit të tretë;

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj dhe ti përvetësoi vetitë e përcaktorëve të rendit të tretë.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Të përsëriten vetitë e përcaktoreve të rendit të dytë?
2. Të shënohet në tabelë forma e përgjithshme e përcaktorit të rendit të tretë

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***
Mësimdhënësi përkufizon

Vetitë e përcaktorëve të rendit të tretë

Në pikën e kaluar përkufizuam përcaktorin e rendit të tretë:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

si shumë:

$$D=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

e cila sipas rregullës së trekëndëshit mund të shkruhet:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{13}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{12}a_{33}.$$

Në vijim po marrim disa veti të përcaktorëve.

1⁰ *Nëse ndrrojnë vendet rreshtat me shtyllat përkatëse, përcaktori nuk e ndërron vlerën.*

Duke u bazuar në këtë veti, më tej vetitë e përcaktorëve si dhe të gjitha pohimet lidhur me përcaktorët i formulojmë vetëm në lidhje me shtylla apo vetëm me rreshta.

2⁰ *Nëse dy shtylla (rreshta) të përcaktorit i ndërrojnë vendet, përcaktori ndryshon shenjën.*

3⁰ *Përcaktori me të gjitha elementet e një shtylle (rreshti) zero është baras me zero.*

4⁰ *Përcaktori me elemente dy shtyllave (rreshtave) të barabarta është baras me zero.*

5⁰ *Faktori i përbashkët i elementeve të një shtylle (rreshti) mund të nxirret para përcaktorit.*

6⁰ *Përcaktori me elementet e dy shtyllave (rreshtave) proporcionale, është i barabartë me zero.*

7⁰ *Nëse elementet e një shtylle(rreshti) të përcaktorit (p.sh. të shtyllës së dytë) janë shumë e nga dy elementeve psh.* $a_{12}=\lambda b_1+\mu b_2$, $a_{22}=\lambda c_1+\mu c_2$, $a_{32}=\lambda d_1+\mu d_2$, *përcaktori mund të shkruhet si shumë e dy përcaktorëve:*

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda b_1+\mu b_2 & a_{13} \\ a_{21} & \lambda c_1+\mu c_2 & a_{23} \\ a_{31} & \lambda d_1+\mu d_2 & a_3 \end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_1 & a_{23} \\ a_{31} & d_1 & a_3 \end{vmatrix}+\mu\begin{vmatrix} a_{11} & b_2 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

8⁰ *Përcaktori nuk e ndryshon vlerën, nëse elemeteve të një shtylle (rreshti)ua shtojmë elementet e një shtylle (rreshti)tjetër, të shumëzuar me një numër të çfarëdoshëm.*

Shembulli 6. Duke zbatuar vetitë e përcaktorëvë, të njehsohen:

a. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$ **b.** $\begin{vmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$

c. $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ -7 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$ **d.** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$

Zgjidhja. **a.** Elementet e rreshtit të dytë e kanë faktorin e përbashkët -3, dmth rreshti i parë dhe i dytë janë proporcionalë, prandaj në bazë të vetisë 6 është:

$$D=-3\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

(Provoni këtë rezultat me metodën e trekëndëshit ose Sarusit).

b. Elementet e shtyllës së dytë të përcaktorit mund t'i shkruajmë:

$6=3+3,\quad 7=2+5,\quad -2=-1-1$

dhe e zbatojmë vetinë 3:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 3+3 & -4 \\ 2 & 2+5 & 3 \\ -1 & -1-1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$=0+\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(15-8\div 9-20-9-6)=19\cdot$$

(Përcaktori i parë është zero, sepse ka dy shtyllat e para zero).

c. Shtyllës së dytë ia shtojmë të parën të shumëzuar me -3, ndërsa shtyllës së tretë ia shtojmë shtyllën e parë të shtumëzuar me -6 (vetia 8) dhe marrim:

$$D=\begin{vmatrix} -1 & -2+(-1)\cdot 3 & 5+(-1)\cdot(-6) \\ 1 & 3+1\cdot(-3) & 6+1\cdot(-6) \\ -7 & 3+(-7)\cdot(-3) & 2+(-7)\cdot(-6) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & 0 \\ -7 & 24 & 44 \end{vmatrix} =$$

$$=11\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -7 & 24 & 4 \end{vmatrix}.$$

3. Duke njehsuar përcaktorin e fundit me anë të komplementeve algjebrik sipas rreshtit të dytë marrim vlerën e përcaktorit

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ -7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -7 & 24 & 4 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 24 & 4 \end{vmatrix} = 11(4-24)=11\cdot(-20)=-220.$$

d. Shtyllën e dytë të shumëzuar me 2 ia shtojmë shtyllës së pare dhe fitojmë:

$$\begin{vmatrix} 2+(-1)\cdot 2 & -1 & -3 \\ 3+4\cdot 2 & 4 & -2 \\ 1+2\cdot 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 11 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 5 \end{vmatrix},$$

mandej shtyllën e dytë të shumëzuar me -3 ia shtojmë shtyllës së tretë dhe marrim:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 11 & 4 & -14 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

(këto veprime i bëjmë njëkohësisht). Përcaktori i fundit, pra edhe fillestari, ka vlerën:

$$\begin{vmatrix} 11 & -14 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -11+70=59.$$

Shembulli 7. Të vërtetohet identiteti:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$$

Zgjidhja. Në përcaktorin e anës së majtë rreshtit të dytë ia shtojmë të tretin të shumëzuar me -1(dmth ia zbresim), ndërsa rreshtit të tretë ia shtojmë të parin të shumëzuar me -1(dmth ia zbresim) dhe pastaj përcaktorin e rendit të tretë e shprehim me përcaktorë të rendit të dytë sipas (15) dhe marrim:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ac \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 0 & b-c & a(c-b) \\ 0 & c-a & b(a-c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-c & a(c-b) \\ c-a & b(a-c) \end{vmatrix} =$$

$$= (b-c)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & -b \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b).$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

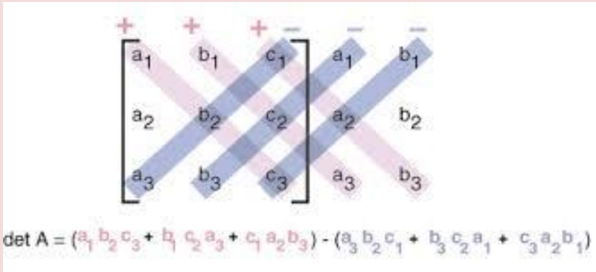
P.sh. vije në përfundim se: vetitë e përcaktorëve ndihmojnë zgjidhjen e tyre

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.



Tema: **5. PËRCAKTORËT**

Njësia mësimore: 5. 4. Zgjidhja e sistemeve katrore të ekuacioneve lineare me dy të panjohura me anë të përcaktorëve

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Numri, algoritmet dhe algjebra</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 5. PËRCAKTORËT</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Përkufizon kuptimin e përcaktorit (determinantit) si vlerë numerike.
2. Njehson vlerën e përcaktorëve të rendit të dytë dhe të tretë me anë të metodave të ndryshme (trekëndëshit, Sarusit,etj.),
3. Zbaton vetitë e përcaktorëve;
4. Shfrytëzon përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura (formulat e Kramerit)</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 5.4.
Zgjidhja e sistemeve katrore të ekuacioneve lineare me dy të panjohura me anë të përcaktorëve</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Zgjidh sistemin e ekuacioneve lineare duke i përdorur përcaktorët</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
3. Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për zgjidhur sistemin e ekuacioneve duke i përdorur përcaktorët.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Fjalët kyçe:</u> sistem i ekuacioneve</td></tr>
<tr><td colspan="4">Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të zgjidhni sistemin e ekuacioneve lineare me dy të panjohur duke i përdorur përcaktorët</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:</u>
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.</td></tr>
</table>

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përdorë përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare.

Shtron disa pyetje. P.sh.
1. Çka quhet sistem i ekuacioneve?
2. Të merret një shembull sistem ekuacionesh me dy të panjohura dhe të shënohet në tabelë?
3. Si quhen elementet para të panjohurës?
4. Shënoni një përcaktor me elemente të shembullit të sistemit?

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi përkufizon

Zgjidhja e sistemeve katrore të ekuacioneve lineare me dy të panjohura me anë të përcaktorëve

Sistemi i ekuacioneve lineare quhet katror nëse numri i ekuacioneve është i barabartë me numrin e të panjohurave.
Rregullat e Kramerit për sistemit katror të rendit të dytë

Konsiderojmë sistemimin prej dy ekuacionesh lineare me dy të panjohura

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_1 \end{cases} \qquad (*)$$

Të zgjidhet një sistem i ekuacioneve do të thotë të gjenden vlerat për x dhe y ashtu qëkut të zëvendësohet dy ekuacionet bëhen identitete. Ekuacionet paraqesin dy drejtëza në rrafsh dhe zgjidhja e sistemit, nëse ekziston, janë koordinatat e pikës së përbashkët - prerjes.

Zgjidhja e sistemeve të ekuacioneve lineare me ndihmën e përcaktorëve bëhet si vijon:
Përcaktori i sistemit është

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Përcaktorët sipas D_x dhe D_y sipas (6) janë:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Prandaj, zgjidhjet e sistemit janë:

$$x = \frac{D_x}{D} \quad dhe \quad y = \frac{D_y}{D}$$

Këto formula që paraqesin zgjidhjen e sistemit quhen *Formulat e Kramerit* për zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare të rendit të dytë.

Formulat e Kramerit mundësojnë që të diskutohen rastet kur sistemi ka një zgjidhje, ka pakufi shumë zgjidhje apo kur nuk ka zgjidhje fare.

Dallojmë rastet:

1. Nëse $D \neq 0$, sistemi ka zgjidhje të vetme dhe zgjidhja e tij shprehet me Formulat e Kramerit.

2. Nëse $D = 0,\ D_x = D_y = 0,$ sistemi ka pafund shumë zgjidhje.

3. Nëse $D = 0,\ dhe\ (D_x \neq 0\ \ ose\ \ D_y \neq 0),$ sistemi nuk ka zgjidhje.

Meqë secili nga ekuacionet e sistemit grafikisht paraqet një drejtëz:
Në rastin 1. dy drejtëzat priten në një pikë; në rastin 2. drejtëzat përputhen; në rastin 3. drejtëzat janë paralele.

Shënim. Sistemet e ekuacioneve lineare janë mësuar edhe në klasat e mëparshme. Por, zgjidhja është bërë me metoda të ndryshme. Këtu po mësojmë zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare të tipit katror me anë të përcaktorëve

Shembulli 8. Duke shfrytëzuar rregullat e Kramerit të shqyrtohen zgjidhjet e sistemeve:

a. $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ x + 4y = -1. \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} 3x - 4y = 1 \\ x + 2y = -4. \end{cases}$ **c.** $\begin{cases} 4x - y = 3 \\ 2x - \dfrac{y}{2} = 0. \end{cases}$

Zgjidhja. **a.** Njehsojmë:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1(-3) = 8 + 3 = 11 \neq 0.$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 4 - (-1)(-3) = 16 - 3 = 13.$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 1 \cdot 4 = -2 - - = -6.$$

Duke zëvendësuar në Formulat e Kramerit gjejmë:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{13}{11},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-6}{11}=-\frac{6}{11}.$$

Prandaj, bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është: $\left\{\left(\frac{13}{11},-\frac{6}{11}\right)\right\}$.

b. $D=\begin{vmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-1\cdot(-4)=6+4=10\neq 0$.

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & -4\\ -4 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-4)\cdot(-4)=2-16=-14$$

$$D_y=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-1\cdot 1=-12-1=-13.$$

Prandaj,

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-14}{10}=-\frac{7}{5},\qquad y=\frac{D_y}{D}=\frac{-13}{10}=-\frac{13}{10}.$$

Përfundimisht, bashkësia e zgjidhjeve është: $\left\{\left(-\frac{7}{5},-\frac{13}{10}\right)\right\}$.

c. Sistemi i dhënë i ekuacioneve është ekuivalent me sistemin:

$$\begin{cases}4x-4=3\\ 4x-y=0.\end{cases}$$

Mandej,

$$D=\begin{vmatrix}4 & -1\\ 4 & -1\end{vmatrix}=(-4)-(-4)=-4+4=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-3-0=-3,$$

$$D_y=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 4 & 0\end{vmatrix}=0-12=-12.$$

Meqë $D=0$, por $D_x\neq 0$ dhe $D_y\neq 0$, sistemi nuk ka zgjidhje (është i pamundshëm). Pra, bashkësia e zgjidhjeve është $\varnothing$ (boshe).

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se nxënësit dinë me zgjidh sistemet e ekuacioneve lineare me dy të panjohura duke i zbatuar përcaktorët. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **5. PËRCAKTORËT**

Njësia mësimore: 5.5. Zgjidhja e sistemeve katrore të ekuacioneve lineare me tri të panjohura me anë të përcaktorëve

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Numri, algoritmet dhe algjebra**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **5. PËRCAKTORËT**	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Përkufizon kuptimin e përcaktorit (determinantit) si vlerë numerike. 2. Njehson vlerën e përcaktorëve të rendit të dytë dhe të tretë me anë të metodave të ndryshme (trekëndëshit, Sarusit,etj.), 3. Zbaton vetitë e përcaktorëve;		

	4. Shfrytëzon përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura (formulat e Kramerit)
Njësia mësimore: 5.5. Zgjidhja e sistemeve katrore të ekuacioneve lineare me tri të panjohura me anë të përcaktorëve	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Zgjidh sistemin e ekuacioneve lineare duke i përdorur përcaktorët

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

5. Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për zgjidhur sistemin e ekuacioneve duke i përdorur përcaktorët.

Fjalët kyçe: sistem i ekuacioneve

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të zgjidhni sistemin e ekuacioneve lineare me tri të panjohur duke i përdorur përcaktorët

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zgjidh sistemin e ekuacioneve të rendit të tretë duke i përdorur përcaktorët.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet sistem i ekuacioneve?
2. Të merret një shembull sistem ekuacionesh me tre të panjohura dhe të shënohet në tabelë?
3. Si quhen elementet para të panjohurës?
4. Shënoni një përcaktor me elemente të shembullit të sistemit?

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi përkufizon

Zgjidhja e sistemeve katrore të ekuacioneve lineare me tri të panjohura me anë të përcaktorëve

Mësimdhënësi:

Rregulla e Kramerit për sistemin katror të rendit të tretë

Konsiderojmë sistemin e ekuacioneve lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (17)$$

Secili nga ekuacionet e sistemit veç e veç paraqet ekuacionin e një rrafshi në hapësirë. Pika e përbashkët e tyre, nëse ekziston, është zgjidhja e sistemit.

Zgjidhja e sistemit (17) me ndihmën e përcaktorëve bëhet me formulat:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \quad D \neq 0 \qquad (18)$$

ku D është përcaktorit të sistemit, e pastaj përcaktorët D_1, D_2 dhe D_3 janë

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

dhe mundësojnë gjetjen e të panjohura të panjohurave x_1, x_2 dhe x_3, përkatësisht.

Përcaktori i sistemit D formohet nga koeficientet e sistemit të ekuacioneve, përcaktori D_1 merret nga përcaktori D kur shtylla e koeficienteve të x_1 zëvendësohet me shtyllën e gjymtyrëve të lira(pra shtylla e parë e D). Ngjashëm merret D_2, kur shtylla e koeficienteve të x_2 (shtylla e dytë e D) zëvendësohet me shtyllën e gjymtyrëve të lira, ndërsa D_3 merret nga D, kur shtylla e koeficientëve të x_3 (shtylla e tretë e D) zëvendësohet me shtyllën e gjymtyrëve të lira.

Formulat (18) për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me tri të panjohura quhen *Formulat e Kramerit* ose shprehin *rregullën e Kramerit* për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare të tipit katror të rendit tre.

Ngjashëm sikur , te sistemet katrore të rendit tre, edhe këtu vërejmë se:

1. Nëse $D \neq 0$ sistemi ka zgjidhje të vetme e cila shprehet me formulat e Kramerti(thuhet ndryshe sistemi është i caktuar);
2. Nëse $D = 0$, por, të paktën njëri nga $D_i \neq 0$ $(i = 1,2,3)$, sistemi nuk ka zgjidhje (ndryshe thuhet sistemi është i pamundshëm ose i pazgjidhshëm);
3. Nëse $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$. Nga (18) shihet se sistemi ka numër të pafundmë

zgjidhjesh(ndryshe thuhet sistemi është I pacaktuar).

Shembulli 9. Duke zbatuar Formulat Kramerit të shqyrtohen dhe zgjidhje sistemet e ekuacioneve lineare:

a. $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$

Zgjidhja. **a.** Vlerën e përcaktorit D të sistemit e njehsojmë me minorët e shtyllës së parë.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-15-7) - 1(6+1) + 1(14-5) = -42.$$

Meqë $D \neq 0$, sistemi është i caktuar, pra ka zgjidhje të vetme e cila shprehet me formulae e Kramerit

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 0(-15-7) - 3(6+1) - 7(14-5) = -84.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & -7 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-9-49) - 1(0+7) + 1(0-3) = -126.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-35+3) - 1(14-0) + 1(-6-0) = -84.$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-84}{-42} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-126}{-42} = 3, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-84}{-42} = 2.$$

Bashkësia e zgjidhjeve është $\{(2,3,2)\}$.

b.

$$D=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-10.$$

$$D_1=\begin{vmatrix}0 & -2 & 1\\ 4 & -1 & 3\\ -2 & -1 & -2\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -1 & -2\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}+(-2)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-10$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 4 & 3\\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}4 & 3\\ -2 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & -2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=-10.$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & -1 & 4\\ 1 & -1 & -2\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=-10.$$

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-10}{-10}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-10}{-10}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{-10}{-10}=1.$$

Prandaj, bashkësia e zgjidhjeve është $\{(1,1,1)\}$.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit dinë me zgjidh sistemet e ekuacioneve lineare me tri të panjohura duke i zbatuar përcaktorët.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **5. PËRCAKTORËT**

Njësia mësimore: 5.6. Zbatime të sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Numri, algoritmet dhe algjebra</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema:5. PËRCAKTORËT</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Përkufizon kuptimin e përcaktorit (determinantit) si vlerë numerike.
2. Njehson vlerën e përcaktorëve të rendit të dytë dhe të tretë me anë të metodave të ndryshme (trekëndëshit, Sarusit,etj.),
3. Zbaton vetitë e përcaktorëve;
4. Shfrytëzon përcaktorët për zgjidhjen e sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura (formulat e Kramerit)</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 5.6. Zbatime të sistemeve të ekuacioneve lineare me dy dhe tri të panjohura</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Zbaton sistemin e ekuacioneve lineare</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Demonstron konceptin për përcaktorin (deri në rendin e tretë), përdorë metodat dhe rregullat e llogaritjes dhe i zbaton ato në situata konkrete për zgjidhjen e problemeve.</td></tr>
</table>

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar përcaktorit dhe përvetëson vetite e tij dhe të zbatoi përcaktorët në situata reale.

Fjalët kyçe: zbatim ; sistemeve; linear

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të zbatoni sistemin e ekuacioneve lineare me një dhe dy të panjohura në kontekstin jetësor

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të zbatoi sistemin e ekuacioneve lineare me dy dhe tre të panjohura nga jeta reale.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet sistem i ekuacioneve
2. Merre këtë shembull: Për 6 libra dhe 8 fletore duhet paguar 30 € e 20 centë. Të gjendet sa kushton një libër dhe një fletore, nëse 4 libra kushtojnë 5 € e 40 centë më shumë se 6 fletore.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi sqaron:

Zgjidhja. Formojmë sistemin duke shënuar:

$6x$ euro duhet paguar për blerjen e librave,

$8y$ euro duhet paguar për blerjen e fletoreve

$4x$ euro kushtojnë 4 libra

$3y$ euro kushtojnë 6 fletore.

Nga kushtet e detyrës formojmë sistemin e ekaucioneve lineare:

$$\begin{cases} 6x+8y=30{,}2 \\ 4x-6y=5{,}4 \end{cases}.$$

Nga zgjidhja e këtij sistemi gjejmë që një libër kushton 3,30 €, ndërsa një fletore kushton 1,30 €.

Shembulli 11. Nëse perimetri i drejtkëndëshit është 100 cm, kurse brinjët fqinjë të tij janë në raport 9:16, njehso brinjët e drejtkëndëshit.

Zgjidhja. Nga të dhënat e detyrës formohet sistemi

$$\begin{cases} 2(a+b)=100 \\ a:b=9:16 \end{cases}$$

zgjidhja e të cilat jep gjatësitë e brinjë të drejtkëndëshit $a=18cm$, $b=32cm$.

Shembulli 12. Automekaniku ka dy shishe (boca) me acid. Shishja e parë përmban 10% të acidit të zbërthyer, ndërsa shishja tjetër përmban 4% të acidit të zbërthyer. Sa centrimetra kub (cm^3) nga secili zbërthim nevojiten për të fituar $120cm^3$ me 6% të acidit të zbërthyer?

Zgjidhja. Le të jetë x - numri i cm kub me 10% të acidit të zbërthyer dhe y -numri i cm^3 me 4% acid të zbërthyer. Atëherë $40cm^3$ të 10% acid të zbërthyer duhet të përzihet me $80cm^3$ me 4% acid të zbërthyer, që të fitohen $120cm^3$ me 6% acid të zbërthyer. Pra:

	3.1 Vëllimi	% acid	***3.2*** Sasia e acidit
3.2.1 *Zbërthimi i parë*	x	10	$0,10x$
3.2.2 *Zbërthimi i dytë*	y	4	$0,04y$
Zbërthimi i përgjithshëm	120	6	$0,06\cdot(120)=72$

Prandaj, sistemi i kërkuar i ekuacioneve është:

$$\begin{cases} x+y=120 \\ 0,10x+0,04y=72. \end{cases}$$

Apo duke shumëzuar me 10 ekuacionin e dytë të sistemit, fitojmë:

$$\begin{cases} x+y=120 \\ 10x+4y=720. \end{cases}$$

Duke shfrytëzuar rregullën e Kramerit, kemi:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}=4-10=-6\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 120 & 1 \\ 720 & 4 \end{vmatrix}=480-720=-240$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 120 \\ 10 & 720 \end{vmatrix}=720-1200=-480$$

Atëherë:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-240}{-6}=40 \text{ dhe } y=\frac{D_y}{D}=-\frac{480}{-6}=+80.$$

Shembulli 13. Në modelimet ekonomike paraqiten ekuacione të cilat paraqesin relacionin ndërmjet çmimit dhe sasisë së mallit ndaj ofertës dhe kërkesës. Zgjidhja e dy ekuacioneve lineare jep ekuilibrin e çmimit p dhe sasisë së mallit q.

Të gjendet ekuilibri i çmimit dhe sasisë së mallit për modelet:

a. oferta: $6p-3q=36$,
kërkesa: $8p+2q=192$.

b. oferta: $-7p+14q=-42$,
kërkesa: $3p+12q=90$.

Zgjidhja.

a. $D=\begin{vmatrix}6 & -3\\ 8 & 2\end{vmatrix}=12+24=36\neq 0$.

$$D_p=\begin{vmatrix}36 & -3\\ 192 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 36+3\cdot 192=36(2+16)=36\cdot 18$$

$$p=\frac{D_p}{D}=18.$$

$$2p-q=12$$

$$q=2p-12=36-12=24.$$

b. Analogjikisht gjejmë $p\approx 14.95$ dhe $q=6$.

Shembulli 14. Në një trekëndësh këndi i mesëm është për 8^0 më i vogël se dyfishi i këndit të vogël, ndërsa këndi më i madh është për 20^0 më i vogël sesa shuma e dy këndëve të tjera. Të gjenden këndet e trekëndëshit.

Zgjidhja. Shënojmë me x_1 – këndin e vogël të trekëndëshit, x_2 – këndin e mesëm dhe x_3 – këndin më të madh.

Meqë shuma e këndeve të brendshme në trekëndësh është 180^0, kemi:

$$x_1+x_2+x_3=180^0.$$

Nga kushti që këndi i mesëm (x_2) është 8^0 më i vogël se dyfishi i këndit më të vogël, fitohet:

$$x_2=2x_1-8.$$

Ndërsa nga kushti që këndi i madh është 20^0 më i vogël se shuma e dy këndeve të tjera, kemi:

$$x_3=x_1+x_2-20.$$

Prandaj, përgjigjen në problemin e shtruar e paraqet zgjidhja e sistemit:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 180 \\ \qquad x_2 = 2x_1 - 8 \\ \qquad x_3 = x_1 + x_2 - 20 \end{cases}$$

apo në trajtën standarde:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 180 \\ -2x_1 + x_2 + 0\cdot x_3 = -8 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 20. \end{cases}$$

Atëherë:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 180 & 1 & 1 \\ -8 & 1 & 0 \\ -20 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -20 & -1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 180 & 1 \\ -20 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 180 & 1 \\ -8 & 1 \end{vmatrix} = 216..$$

$$D_2 = 384.\ D_3 = 480.$$

Rrjedhimisht:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{216}{6} = 36, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{384}{6} = 64 \ \text{ dhe } \ x_3 = \frac{D_2}{D} = \frac{480}{6} = 80.$$

Andaj, këndet e trekëndëshit janë: $36^0, 64^0$ dhe 80^0.

d. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit janë në gjendje të zbatojnë sistemin e ekuacioneve në situata reale.

Përcaktorët

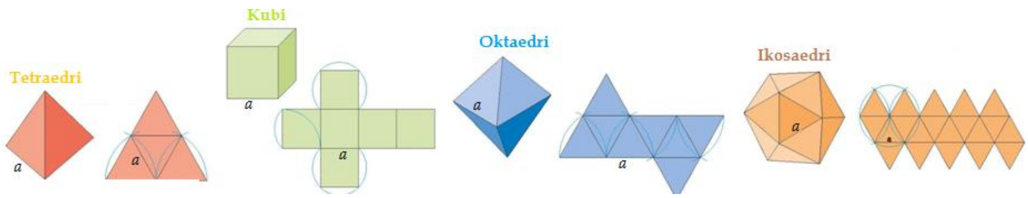
Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por të ketë një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

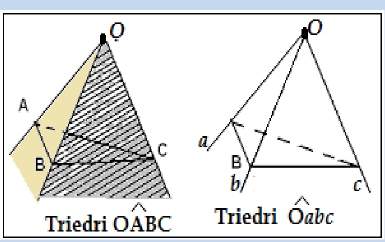
KAPITULLI 6. POLIEDRAT



Tema: **6.1. POLIEDRAT**

Njësia mësimore: 6.1.1. Diedri (Dyfaqëshi),
6.1.2. Rrafshet normale.
6.1.3. Triedri dhe këndi poliedrik
6.1.4. Poliedri
6.1.5. Sipërfaqja prizmatike

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:

Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema:5. PËRCAKTORËT

</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Identifikon prizmin, piramidën dhe paralelepipedin dhe pjesët përbërëse të tyre;
2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e paralelepipedit kënddrejtë, prizmit të drejtë dhe piramidës së drejtë;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
6.1.1. Diedri (Dyfaqëshi),
6.1.2. Rrafshet normale.
6.1.3. Triedri dhe këndi poliedrik
6.1.4. Poliedri
6.1.5. Sipërfaqja prizmatike</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përkufizon diedrin;
2. Përkufizon rrafshin normal
3. Përkufizon triedrin dhe këndin poliedrik
4. Përkufizon poliedrin
5. Përkufizon sipërfaqen prizmike</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u></td></tr>
</table>

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensional;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesional;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar diedrin, rrafshin normal, trierin,dhe kendi poliedri, dhe sipërfaqen prizmike vetitë e tyre dhe të zbatoi në situata reale.

Fjalët kyçe: Diedër, rrafsh normal, triedër, kënd poliedrik, sipërfaqe, prizmike

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni diedrin;
2. Të përkufizoni rrafshin normal
3. Të përkufizoni triedrin dhe këndin poliedrik
4. Të përkufizoni poliedrin
5. Të përkufizoni sipërfaqen prizmike

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj poliedrat .

Mësimdhënësi:

Shtron pyetje. P.sh.

1. Të merren shembuj nga jeta që formojnë dyfaqësh?
2. Të merren disa shembuj që formojnë pjesë të trupave me qoshe?
3. Gjeni shembuj që formojnë sipërfaqe prizmike?
4. Gjeni shembuj nga jeta që formojnë kuboid dhe kub?

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Diedri (Dyfaqëshi)

Mësimdhënësi përkufizon:

Përkufizimi i diedrit

*Bashkësia e dy gjysmërrafsheve të cilat drejtëzën kufitare e kanë të përbashkët, quhet **diedër** ose **dyfaqësh**.*

Gjysmërrafshet i quajmë faqet e diedrit, ndërsa drejtëza e përbashkët e tyre quhet *tehu i diedrit*.

Diedri e ndanë hapësirën në dy pjesë:
I pjesën e brendshme dhe II pjesën e Jashtme, fig. 6.1.

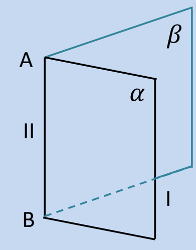


Fig.6.1

Pjesën e brendshme të dendrit mund ta përkufizojmë si bashkesi pikash të hapësirës të cilat ndodhen nga ajo anë e njërës faqe nga ndodhet edhe faqja tjetër e diedrit. Pjesa tjetër e hapësirës quhet didër i jashtëm.

Diedrin e quajmë të rrashtë nëse faqet e tij i takojnë një rrafshi. fig.6.2.

Dy diedra i quajmë të kundërt nëse kanë tehe të përbashkët dhe tehet e njërit diedër janë vazhdim i faqeve të deidrit tjetër. Fig.6.3

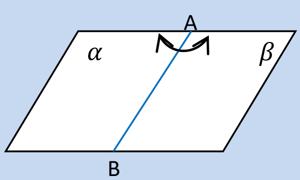


Fig. 6.2

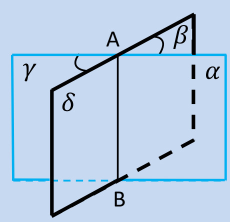


Fig.6.3

Përkufizimi i këndit të diedrit

Kënd të diedrit e quajmë këndin i cili fitohet duke prerë diedrin me një rrafsh normal në tehun e tij.

Kulmi i këndit të diedrit është një pikë O në tehun e diedrit, ndërsa krahët e tij janë dy gjysmë drejtëza OP dhe OQ në faqet e diedrit normale në tehun e tij, fig 6.4. Të gjitha këndet e diedrit janë kongruente, fig.6.5.

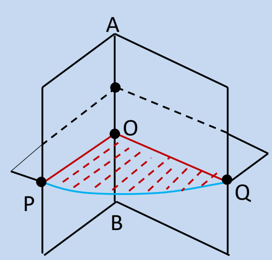


Fig. 6.4

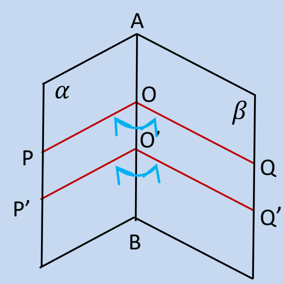


Fig.6.5

Dy diedra quhen konguruent nëse këndet e tyre janë kongurent. Diedri quhet i drejtë nëse këndi i tij është i drejtë.

Rrafshet normale

Dy rrafshe që priten α dhe β formojnë katër diedra, dy nga dy kongruent dhe suplementarë.

Dy rrafshe α dhe β që priten janë normale në çiftë nëse njëri nga diedrat që formojnë ata është diedër i drejtë. Këtë fakt e shënojmë $\alpha \perp \beta$.

Nëse dy rrafshe që priten α dhe β i prehen më një rrafsh të tretë, normal në drejtëzën prerëse të tyre, atëherë formohen këndet e katër diedrave. Nëse njëri nga ta është i drejtë, atëherë të katër këndet janë të drejta. Prandaj, dy rrafshe normale formojnë katër diedra të drejtë.

Nëse një drejtëz është normale në një rrafsh, atëherë çdo rrafsh që e përmban këtë drejtëz është normale në atë rrafsh.
Në figurën 6.6 AB është normale në rrafshin α, por AB është normale edhe në secilën drejtëz të rrafshit α që kalon nëpër pikën O.

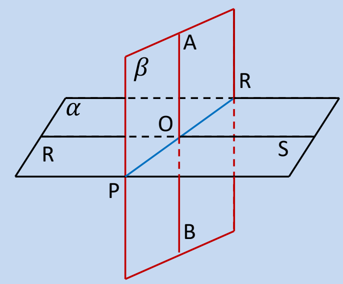


Fig.6.6

Mësimdhënësi shënon në tabelë: **Triedri dhe kendi poliedrik**

Përkufizimi i triedrit dhe këndit poliedrik

Sipërfaqe këndore e quhet një pjesë të rrafshit që kufizohet nga dy gjysmëdrejtëza me fillim në një pikë të përbashkët.

Bashkësia e tri sipërfaqeve këndore me kulm të përbashkët, të vendosura në atët mënyrë që çdo dy prej tyre kanë një teh të përbashkët, quhet triedër, fig.6.7

Kulmin e përbashkët K e quajmë këndë të Triedrit; gjysmëdrejtëzat Ka, Kb dhe Kc i quajmë tehet e triedrit; këndet $\measuredangle\, aKb$, $\measuredangle\, bKc$ dhe $\measuredangle\, aKc$ i quajmë këndë e triedrit; sipërfaqet këndore aKb, bKc dhe aKc i qujamë faqet e triedrit.

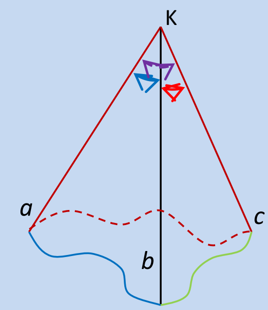


Fig.6.7

Kënd poliedrik quajmë bashkësinë e një numri të fundmë sipërfaqesh këndore, me kulm të përbashkët, ashtu që dy nga dy kanë nga një brinjë të përbashkët dhe janë të vendosura në atë mënyrë që çdo dy sipërfaqe këndore fqinjë nuk i takojnë një rrafshi, fig. 6.8.

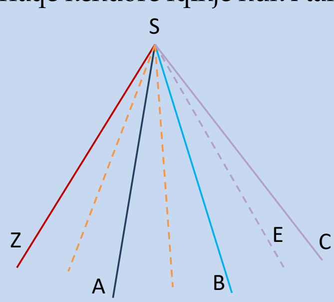


Fig.6.8

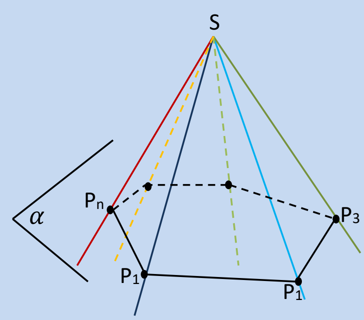


Fig.6.9

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Poliedri

Përkufizimi i poliedrit

Poliedër quhet trupi i kufizuar nga sipërfaqe poligonale të rrashta të vendosura në atë mënyrë që çdo brinjë e një sipërfaqeje poligonale është brinjë e edhe vetëm një sipërfaqe tjetër poligonale.

Brinjët e sipërfaqeve poligonale quhen ***brinjë të poliedrit***. Sipërfaqet poligonale që e kufizojnë e poliedrin quhen ***faqet e poliedrit***. Faqet e poliedrit që kanë një kulm të përbashkët formojnë një ***kënd poliedrik***, ndërsa kulmet e këndeve poliedrike quhen ***kulmet e poliedrit***. Segmenti që bashkon dy kulme të poliedrit që nuk i takojnë një faqeje, quhet **diagonale e poliedrit**. Një lloj poliedri është dhënë në fig.6.9

Poliedrat që kanë faqet poligoni të rregullt quhet poliedra të rregullt. Poliedrat e rregullt klasifikohen sipas numrit të faqeve të tyre: ***Tetraedri*** (4 faqe-trekëndësha, fig. 6.10, a), ***Heksaedri*** (6 faqe-katrorë, fig. 6.10, b)), ***Oktaedri*** (8 faqe-trekëndësha, fig. 6.10, c), ***Dodekaedri*** (12 faqe-pesëkëndësha, fig. 6.10, ç)), ***Ikosaedri*** (20 faqe-trekëndësha fig. 6.10, d)).

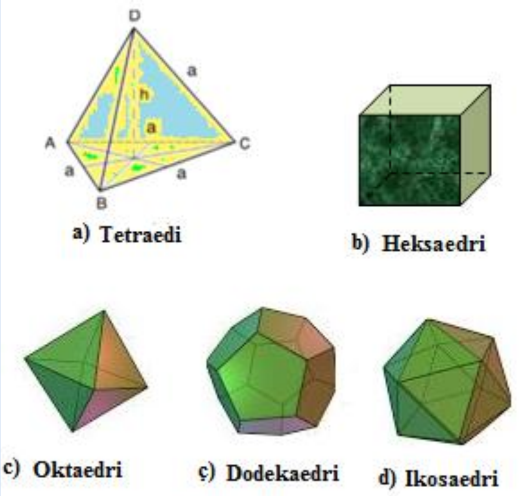


Fig. 6.10

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Sipërfaqja prizmatike

Le të jetë dhënë poligoni $A_1A_2A_3 \dots A_n$ dhe drejtëza fikëse d që nuk ndodhet e në rrafshin e tij.

Përkufizimi i sipërfaqes prizmatike

Sipërfaqe prizmatike quhet sipërfaqja që e përshkruan një drejtëz p *duke lëvizur nëpër vijën poligonale* $A_1A_2A_3 \dots A_n$ *dhe duke qëndraur paralal me drejtëzën fikëse d, quhet* ***sipërfaqe prizmatike***.

Vija poligonale $A_1A_2A_3 \dots A_n$ quhet ***drejtuese***, kurse drejtëza lëvizëse p quhet ***përftuese*** e sipërfaqes prizmatike. Sipërfaqja e përshkuar gjatë lëvizjes së përftuese përgjatë një brinjë të poligonit, quhet ***faqe*** e sipërfaqes prizmatike. Pozitat e përftueses kur kalon nëpër kulmet e vijës poligonale quhen ***tehet*** e sipërfaqes poligonale, fig. 6.11.

Nëse poligoni $A_1A_2A_3 \dots A_n$ është konveks, atëherë sipërfaqja prizmatike është konvekse. Në të kundërtën, sipërfaqja prizmatike është konkave.

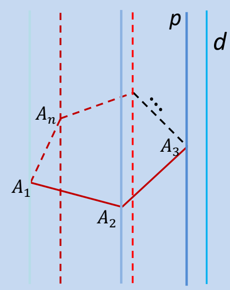


Fig.6.11

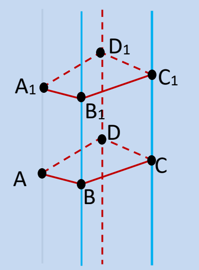


Fig. 6.12

Përkufizimi i prizmit

Prizëm quhet trupi i formuar nga një sipërfaqe prizmatike dhe dy rrafshe paralele që e presin ate, fig.6.12.

Prerjet e sipërfaqes prizmatike me dy rrafshe paralele janë poligone kongruent dhe quhen ***bazat e prizmit***. Pjesa e sipërfaqes prizmatike që ndodhet në mes të bazave quhet ***mbështjellësi i prizmit***.

Nëse tehet e prizmit janë normale në bazat e tij, prizmi quhet i ***prizëm drejtë***. Në të kundërtën prizmi quhet i ***pjerrtë.***

Nëse bazat e prizmit janë poligone të rregullt ***prizmi quhet i rregullt***.

Prizmat dallohen për nga numri i faqeve të tyre: ***trifaqësore***, ***katërfaqësore***, ***pesëfaqësore*** etj.

Shembulli 1. Analizoni sa faqe, sa dyfaqësh, sa trefaqësh (triedra) ka prizmi pesëfaqësor?

Zgjidhja: 5 faqe (dhe dy baza), 15 dyfaqësha(diedra) dhe 10 triedra.

Shembulli 2. Sa diagonale ka prizmi: trefaqësor, katërfaqësor, pesëfaqësor etj. *n*-faqësor?

Zgjidhja: Prizmi trefaqësor ka 0 diagonale, prizmi katërfaqësor ka 4 diagonale, prizmi pesëfaqësor ka 10 diagonale,....prizmi n faqësor ka n(n-3) diagonale (pse?).

Shembulli 3. Sa është numri më i vogël i faqeve që mund të ketë një prizëm? Sa kulme dhe sa brinjë ka ai prizëm?

Zgjidhja. 5 faqe, 6 kulme, 9 brinjë.

Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja. Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se poligonet janë trupa tre dimenzional dhe me qoshe. Dy gjysmë rrafshe me një drejtëz të përbashkët formojnë diedër, të pritur në mes tyre formojnë tetë diedra dhe se sipërfaqja prizmike formohet nëse një drejtëz rrotullohet pa shkëputur nga një poligon. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **6.2. MATJA E TRUPAVE**

Njësia mësimore: 6.2.1. Paralelepipedi (Kuadri)
6.2.2. Syprina e prizmit

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **6.2. MATJA E TRUPAVE**	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 3. Identifikon prizmin, piramidën dhe paralelepipedin dhe pjesët përbërëse të tyre; 4. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e paralelepipedit kënddrejtë, prizmit të drejtë dhe piramidës së drejtë;
Njësia mësimore: 6.2.1. Paralelepipedi (Kuadri) 6.2.2. Syprina e prizmit	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon paralelepipedin 2. Interpreton paralelepipedin si trup gjeometrik 3. Njëson syprinën e prizmit
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi: 1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë; 2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensionalë; 3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesionalë;	
Qasja e të nxënit: Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar përcaktorit e rendit të tretë dhe të zbatoi përcaktorët në situata reale.	
Fjalët kyçe: Trup, paralelepiped, prizëm, syprinë	
Kriteret e suksesit: *Mësimdhënësi*, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore 1. Të përkufizoni paralelepipedin 2. Të interpretoni paralelepipedin si trup gjeometrik 3. Të njësoni syprinën e prizmit	
Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore: Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.	
Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore: Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.	
Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe **Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës** ***Organizimi i orës së mësimit:*** ***a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*	

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj trupat dhe të njehsoi syprinën e prizmës.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet paralelogram?
2. Si duket paralelepipedi?
3. Çka është kubi?
4. Si njehsohet syprina e paralelepipedit?
5. Prej çfarë elementesh përbëhet prizmi?

Të gjitha këto pyetje paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Matja e trupave

Mësimdhënësi përkufizon:

Paralelepipedi (Kuadri)

Përkufizimi i paralelepipedit

Paralelepiped ose kuadër quhet prizmi baza e të cilit është paralelogram. Nëse tehu i paralelepipedit është normal në bazë ***paralelepipedi quhet i drejtë****. Në të kundërtën* ***paralelepipedi quhet i pjerrtë****.*

Nëse baza e paralelepipedit është drejtkëndësh, ***paralelepipedi quhet kënddrejtë***.

Nga përkufizimi i paralelepipedit rrjedh që:

1. Bazat e paralelepipedit janë paralelograme,
2. Faqet anësore të paralelepipedit të janë drejtkëndësha,
3. Të gjitha faqet e paralelepipedit kënddrejtë janë drejtkëndësha.

Paralelepipedi kënddrejtë të gjitha brinjët e të cilit janë të barabarta, ***quhet kub***.

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Syprina e prizmit

Teorema për mbështjellësin e prizmit

Syprina e mbështjellësit të prizmit është e barabartë me prodhimin e perimetrit të një prerje të drejtë me gjatësinë e një tehu anësor.

Vërtetimi. Më parë e kemi përkufizuar prerjen e drejtë të një prizmi si poligon që merret kur një prizëm pritet me një rrafsh që është normal në tehet e prizmit.

Syprina mbështjellësit të prizmit është e barabartë me shumën e syprinave të faqeve të tij paralelograme. Për secilën faqe të prizmit bazë e saj mund të merret tehu i prizmit, ndërsa lartësi merret brinja përkatëse e poligonit prerës të prerjes së drejtë, fig. 6.13. Prandaj syprina e anshme e prizmit është:

$$S = \overline{AA_1} \cdot a_1 + \overline{BB_1} \cdot b_1 + \overline{CC_1} \cdot c_1 + \cdots + \overline{MM_1} \cdot m_1$$

ose

$$S = \overline{AA_1} \cdot (a_1 + b_1 + c_1 + \cdots + m_1),$$

sepse sipas përkufizimit, tehet e prizmit janë të barabarta, ndërsa faqet janë paralelograme me syprina të barabarta me prodhimin bazës me lartësinë.

Syprina e prizmit është e barabartë me shumën e syprinave të dy bazave dhe mbëtjellësit. Pra,

$$S = 2B + M.$$

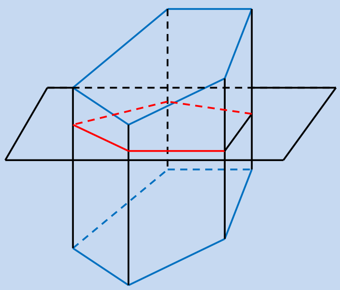


Fig.6.13

Paralelopipedi i drejtë është një rast i veçantë i prizmit me baza dhe faqe drejtkëndësha. Faqete tij te përballshme janë dy nga dy kongruente. Prandaj nëse me a, b, c i shënojmë dimensionet me formulën e paralelopipedit, syprina e tijë shprehet

$$S = 2ab + 2bc + 2ac = 2(ab + bc + ac).$$

Pra,

$$S = 2(ab + bc + ac).$$

Kubi është rast i veçantë i paralelepipedit kur dimensionet e tij janë të barabarta $a = b = c$. Faqet e kubit janë katror. Prandaj formula për njehsimin e syprinës së katrorit është

$$S = 6a^2.$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli. Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

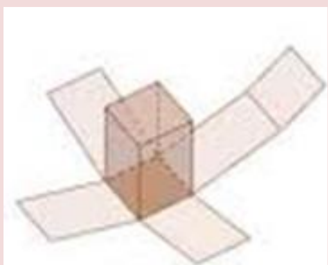
Reflektimi i orës mësimore:

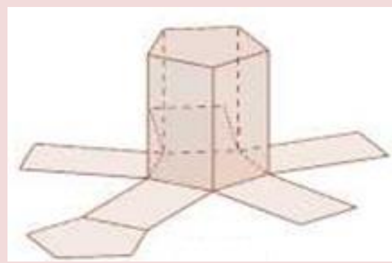
Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim

të plotë të rezultateve të të nxënit.
P.sh. vije në përfundim se: Nxënësi ka përvetësuar se çka është paralelepipedi dhe si njehsohet syprina e prizmës dhe se si mund të i zbatojnë në kontekste të ndryshme reale.
Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.





Tema: **6.2. MATJA E TRUPAVE**
Njësia mësimore: 6.2.3. Vëllimi i poliedrit
6.2.4. Parimi i Kavalierit
6.2.5. Vëllimi i paralelepipedit

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **6.2. MATJA E TRUPAVE**	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 5. Identifikon prizmin, piramidën dhe paralelepipedin dhe pjesët përbërëse të tyre; 6. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e paralelepipedit kënddrejtë, prizmit të drejtë dhe		

	piramidës së drejtë;
Njësia mësimore: 6.2.3. Vëllimi i poliedrit 6.2.4. Parimi i Kavalierit 6.2.5. Vëllimi i paralelepipedit	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Njehson vëllimin e poliedrit; 2. Interpreton parimin e Kavalierit; 3. Njehson vëllimin e paralelepipedit.

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensionalë;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesionalë;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për njehsimin e vëllimit të poliedrit, interpretimin e Parimit të kavalierit dhe njehsimin e vëllimit të paralelepipedit dhe të zbatoi në situata reale.

Fjalët kyçe: përcaktorë, veti, rendi i tret

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të njehsoni vëllimin e poliedrit;
2. Të Interpretoni parimin e Kavalierit;
3. Të njehsoni vëllimin e paralelepipedit.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të njehsimin e vëllimit të poliedrit, interpretimin e Parimit të kavalierit dhe njehsimin e vëllimit të paralelepipedit.

Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet paralelepiped?
2. Si njehsohet syprina e paralelepipedit?
3. Si njehsohet syprina e prizmit?
4. Si e kuptoni konceptin e vëllimit

b. *Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)*

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Vëllimi i poliedrit

Mësimdhënësi përkufizon

Njësia e për matjen e vëllimit të poliedrave është kubi me dimension një njësi gjatësie. P.sh metri kub (m^3), centimetri kub (cm^3) etj. janë njësi për matjen e vëllimit të trupave në përgjithësi.

Vëllim i një poliedri e quhet numri i cili tregon se sa herë poliedri është më i madh se njësia për matjen e vëllimit.

Mësimdhënësi shënon në tabelë**:**

Parimi i Kavalierit

Parimi i Kavalierit është shpallur nga matematikani Italian në vitin 1637 dhe ka një zbatim të madh për njehsimin e vëllimit të trupave të parregullt gjeometrik. Vërtetimi i tij është bërë shumë më vonë dhe teknikat e vërtetimit të tij tejkalojnë caqet e këtij kursi. Për këtë arsye ne vetëm po e formulojmë dhe e po e marrim si të mirëqenë.

Formulimi i Parimit të Kavalierit

Në qoftë se dy trupa (të kufizuar me sipërfaqe të rrafshëta apo të përkulura) mund të vendosen në një pozitë të tillë që çdo rrafsh paralel me një rrafsh të dhënë e ndërprenë këta dy trupa në sipërfaqe me syprina të barabarta, atëherë këta dy trupa kanë vëllime të barabarta.

Mësimdhënësi shënon në tabelë**:**

Vëllimi i paralelepipedit

Masat numerike të tri brinjëve fqinjë të paralelepipedit quhet ***dimensionet e paralelepipedit***.

Teorema për vëllimin e paralelepipedit

Vëllimi i paralelepipedit është i barabartë me prodhimin e dimensioneve të tij.

Duhet e të vërtetojmë që $V = abc$.

Bazën e paralelepipedit e ndajmë në ab njësi katrore. Në sicilin nga njësitë katrore vendosim nga një njësi kubike (kub me dimension 1). Në këtë mënyrë kemi ndërtuar ab njësi kubike në një shtresë mbi bazën e paralelopipedit. Por, duke ndarë lartësinë e paralelopipedit në c njësi gjatësie, ne mund të bëjmë c shtresa me nga ab njësi kubike. Kështu, paralelopipedin e ndajmë në abc njësi kubike, fig. 6.14. Rrjedhimisht, vëllimi i paralelepipedit është

$$V = abc.$$

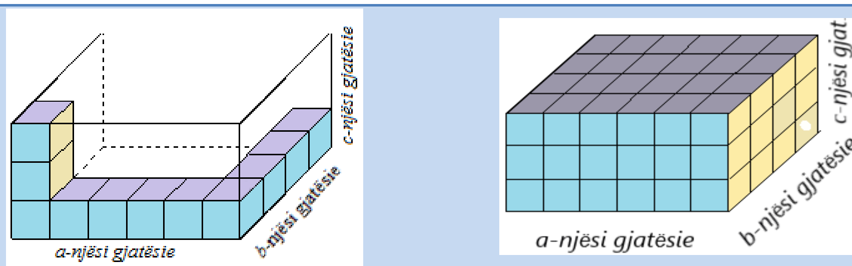


Fig.6.14

Paralelepipedi me dimensione të barabarta $a = b = c$, quhet ***kub***. Rrjedhimisht, vëllimi i kubit është

$$V = a^3.$$

Prodhimi ab paraqet syprinën e bazës së paralelopipedit, prandaj syprina e paralelopipedit është e barabartë me prodhimin e bazës me lartësinë. Pra,

$$V = B \cdot H.$$

Në përgjithësi ky pohim vlen edhe për vëllimin e çfarëdo prizmi. Pra:

Vëllimi i prizmit është i barabartë me prodhimin e bazës me lartësinë, $V = B \cdot H$.

Vërtetësia e këtij pohimi rrejdh nga parimi i Kavalierit. Psh, marrim një prizëm të rregullt gjashtëfaqësore $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ dhe me bazë në rrafshin e bazës sa tij konstruktojmë një prizmë të rregullt katërfaqësore me syprinë të bazës të barabartë me syprinën e bazës së prizmës katëfaqësore $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ dhe me lartësi të barabartë me lartësinë e prizmës gjashtëfaqësore, fig 6.15. Është e qartë se nëse këto dy prizma i presim me çfarëdo rrafshi paralel me rrafshin e bazës, prerjet e tyre do të jenë figura të rrafshëta me syprina të barabarta. Në bazë të parimit të Kavalierit, këto dy prizma kanë vëllime të barabartat. Meqë vëllimi i prizmit katërfaqësor $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ është $V = B \cdot H$, atëherë edhe vëllimi i prizmës gjashtëfaqësor $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ është $V = B \cdot H$. Kjo vlen për çfarëdo prizme.

Pra, vëllimi i prizmit është $V = B \cdot$

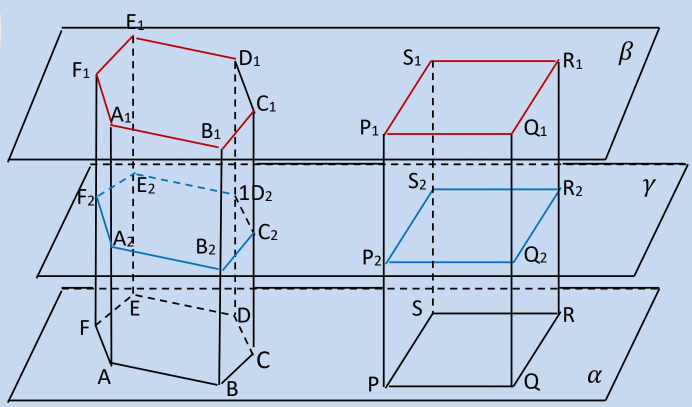


Fig. 6.15

Shembulli 4. Të shprehet e diagonalja e paralelepipedi të kënddrejtë përmes dimensioneve të tij .

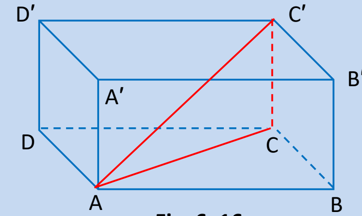


Fig. 6. 16

Zgjidhja. Po e gjejmë vetëm gjatësinë e njërës diagonale, p.sh. AC'.
Nga fig. 6.16, shihet se AC' është hipotenuza e $\Delta ACC'$ $(\angle C = 90^0)$
Prandaj:

$$\overline{AC'}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CC'}^2 .$$

Po ashtu AC është hipotenuza e ΔABC $(\angle B = 90^0)$, prandaj:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 .$$

Meqë $\overline{BC} = \overline{AD}$, atëherë $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$.

Meqë $\overline{CC'} = \overline{A'A}$, atëherë $\overline{AC'}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{AA'}^2$.Nëse dimensionet e paralelepipedit i shënojmë $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$ dhe $\overline{AA'} = c$, atëherë marrim $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, prej nga $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$..

Rjedhim. Në rast se $a = b = c$ marrim formulën për diagonalen e kubit $d = a\sqrt{3}$.

Shembulli 5. Le të jenë a, b dhe c dimensionet e paralelepipedit. Të njehsohet syprina e tij.

Zgjidhja. Syprina e paralelepipedit është $S = 2B + M$, ku $B = a \cdot b$ dhe $M = 2ac + 2bc$, prandaj syprina e paralelepipedit është:

$$S = 2(ab + ac + bc) .$$

Rrjedhim. Në qoftë se $a = b = c$ marrim formulën për syprinën e kubit $S = 6a^2$.

Shembulli 6. Baza e prizmit të drejtë $ABCDA'B'C'D'$ është trapez barakrahës $ABCD$ me brinjë $\overline{AB} = \overline{CD} = 13cm$, $\overline{BC} = 11cm$ dhe $\overline{AD} = 21cm$..Syprina e prerjes diagonale $BB'D'D$ është $180cm^2$. Të njehsohet:

a) syprina e përgjithshme e prizmit; *b*) syprina e prerjes $AB'C'D$.

Zgjidhja. a) Syprina e bazës së prizmit është:

$$S_b = \frac{1}{2}(\overline{BC} + \overline{AD}) \cdot \overline{BE} ,$$

ku $\overline{BE}$ është lartësia e trapezit $ABCD$.
Nga trekëndëshi kënddrejtë ABE ,
fig. 6.17 kemi: $\overline{BE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AE}^2$.

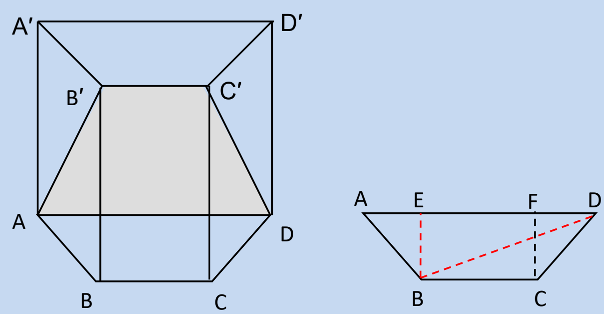


Fig. 6.17

Nga trapezi ABCD, gjejmë $\overline{AE} = \overline{FD} = 5cm$ dhe $\overline{AB} = 13cm$, ndërsa $\overline{BE} = 12cm$. Prandaj $B = 192cm^2$.

Në trekëndëshin kënddrejtë BED kemi:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{ED}^2 \Rightarrow \overline{BD} = 20cm.$$

Syprina e drejtkëndëshit $BB'D'D$ është:

$$S_{BB'D'D} = \overline{BD} \cdot \overline{BB'},$$

ku $\overline{BB'} = 9cm$, prandaj $M = 522cm^2$.

Syprina e përgjithshme e prizmit është $S = M + 2B = 906cm^2$..

b) $S_{AB'C''D} = 240cm^2$.

Shembulli 7. Diagonalja e paralelepipedit kënddrejtë është $35cm$, ndërsa brinjët e tij qëndrojnë në raport $2:3:6$. Të njehsohet vëllimi i paralelepipedit.

Zgjidhja. Meqë $D = 35 \Rightarrow D^2 = a^2 + b^2 + c^2$ dhe $2:3:6 = a:b:c$, atëherë kemi:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{6} \Rightarrow a = 2k,\ b = 3k,\ c = 6k \Rightarrow$$

$$35^2 = (2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2 \Rightarrow 35^2 = 4k^2 + 9k^2 + 36k^2 \Rightarrow$$

$$35^2 = 49k^2 \Rightarrow 7k = 35 \Rightarrow k = 5,$$

atëherë:

$$a = 2 \cdot 5 = 10cm,\ b = 15cm,\ c = 30cm.$$

Pra, vëllimi i kërkuar është:

$$V = 10 \cdot 15 \cdot 30 \text{ ose } V = 4500cm^3.$$

Shembulli 8. Njehsoni largësinë e diagonales hapësinore e kubit me brinjë a nga mesi i brinjës që pritet me diagonalen.

Zgjidhja: Largësia e kërkuar është gjatësia e normales së lëshuar prej mesit të brinjës BB_1 në diagonalen e kubt D_1B, fig, 6.18. Në qoftë se nga mesi M i brinjës BB_1 lëshojmë normalen në diagonalen D_1B dhe me N shënojmë këmbzën e normales së saj, atëherë $\overline{D_1B} = a\sqrt{3}$, si diagonale hapësinore e kubit, $\overline{D_1B_1} = a\sqrt{2}$, si diagonal e faqes së kubit, dhe $\overline{BM} = \frac{a}{2}$.

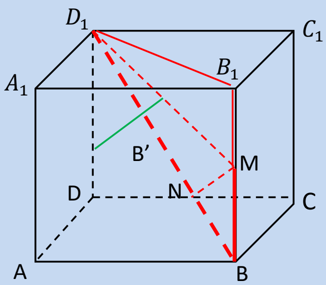
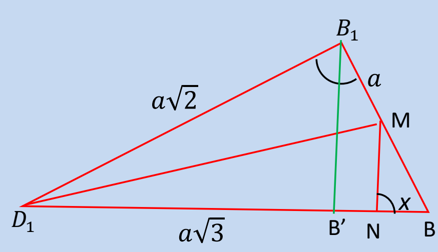


Fig.6.18



Nga ngjashmëria e trekëndëshave MNB dhe BB_1D_1 rrjedh

$$\frac{x}{a}=\frac{\frac{a}{2}}{a\sqrt{3}}\Rightarrow x=\frac{a^2}{2a\sqrt{3}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}.\text{ Pra, } x=\frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Pastaj nga trekëndëshi kënddrejtë marrim

$$\overline{MN}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-x^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2=\cdots\Rightarrow\overline{MN}=\frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Shembulli 9. Largësia e njërit kulm të kubit nga diagonalja hapësinore e tij është 7cm. Njehsoni syprinën e kubit.

Zgjidhja: Nga figura 6.18, shohim se $\overline{B_1B}'=2\overline{MN}$, sepse $\overline{MN}$, është vi e mesme e trekëndëshit $BB'B_1$, prandaj, në bazë të detyrës 8, kemi $\overline{B_1B}'=2\overline{MN}=2\cdot\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a\sqrt{6}}{3}\Rightarrow$ $\frac{a\sqrt{6}}{3}=7\Rightarrow a=\frac{7\sqrt{6}}{2}$. Prandaj syprina e kubit është

$$S=6\left(\frac{7\sqrt{6}}{2}\right)^2=441cm^2.$$

Shembulli 10. Të njehsohet, në vatësi të brinjës së bazës a dhe brinjës anësore H, syprina dhe vëllimi i prizmit të rregullt:

a) trefaqësor; *b*) katërfaqësor.

Zgjidhja. a) Meqë prizmi është i rregullt trefaqësor, baza e tij është trekëndësh barabrinjës $S_b=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ si dhe syprina anësore (mbështjellësi) përbëhet prej tre drejtkëndëshave me brinjë a dhe H. Atëherë $S_a=3\cdot a\cdot H$, kurse lartësia e prizmit është tehu anësor s, pra:

$$S=2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot a\cdot H\Rightarrow S=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}+3\cdot a\cdot H\Rightarrow S=a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+3H\right)$$

$$V=B\cdot H=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{a^2H\sqrt{3}}{4}.$$

b) $V=a^2H$, $S=2a^2+4a\cdot H=2a(a+2H)$.

Shembulli 11. Brinjët e dy kubeve qëndrojnë në përpjesë sikurse $3:2$. Të njehsohen syprina dhe vëllimi, nëse:

a) syprinat ndryshojnë për $120cm^2$;

b) vëllimet ndryshojnë për $513cm^3$.

Rezultati: a) $S_1=216cm^2$, $V_1=216cm^3$, $S_2=96cm^2$, $V_2=96cm^3$

b) $S=486cm^2$, $S_1=216cm^2$, $V=729cm^3$, $V_1=216cm^3$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në

përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.
Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.
P.sh. vije në përfundim se si e interpreton vëllimin e poliedrave ku ka mbështetje duke u bazuar në Parimin e Kavalierit dhe duke njehsuar vëllimin e prizmës. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

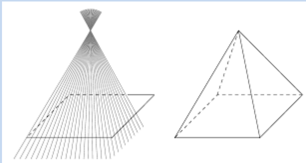
- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **6.3. PIRAMIDA**
Njësia mësimore: **6.**3.1. Piramida
6.3.2. Vëllimi i piramidës

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **6.3. PIRAMIDA**



Rezultati i të nxënit të temës:

Nxënësi do të jetë në gjendje të:

1. Identifikon prizmin, piramidën dhe paralelepipedin dhe pjesët përbërëse të tyre;
2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e paralelepipedit kënddrejtë, prizmit të drejtë dhe piramidës së drejtë;

Njësia mësimore:

6.3.1. Piramida

6.3.2. Vëllimi i piramidës

Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:

1. Përkufizon sipërfaqen piramidale;
2. Përkufizon piramidën;
3. Njëson vëllimin e piramidës;

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensionalë;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesionalë;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar piramidën dhe njësimi i vëllimit të piramidës dhe të zbatoi përcaktorët në situata reale.

Fjalët kyçe: piramidë, vëllimi i piramidës

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni sipërfaqen piramidale;
2. Të përkufizoni piramidën
3. Të njësoni vëllimin e piramidës

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

***a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve** (rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj piramidën dhe të njehsoi vëllimin e piramidës.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet piramidë?
2. Si njësohet syprina e piramidës?
3. Si njehsohet vëllimi i prizmës?
4. Cili është dallimi në mes të prizmës dhe piramidës?
5. Cila është ideja për njehsimin e piramidës?

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Piramida

Mësimdhënësi përkufizon

Përkufizimi i piramidës

Piramidë quhet trupi i kufizuar nga një kënd poliedrik dhe një rrafsh që i pret të gjitha brinjët e tij.

Pjesa e këndit poliedrik e kufizuar nga rrafshi prerës quhet ***sipërfaqja e anshme e piramidës*** ose ***mbështjellës i piramidës***. Sipërfaqja e rrafshët e ndërprerë nga këndi poliedrik quhet ***baza e piramidës***, fig. 6.16.

Segmenti i hequr nga kulmi i piramidës, normal në rrafshin e bazës, quhet ***lartësia e piramidës***.

Piramidat klasifikohen sipas numrit të brinjëve të bazës: ***trifaqësore***, ***katërfaqësore***, ***pesëfaqësore*** e tij.

Piramida quhet e ***rregullt*** në qoftë se baza e saj është poligon i rregullt ndërsa lartësia e saj bie në qendrën e bazës, fig.6.20.

Brinjët anësore të piramidës së rregullt janë kongruence(të barabarta). Faqet anësore të piramidës së rregullt janë trekëndësha barakrahës. Lartësia e cilësdo prej faqeve anësore quhet *apotema e piramidës*, fing. 6.20.

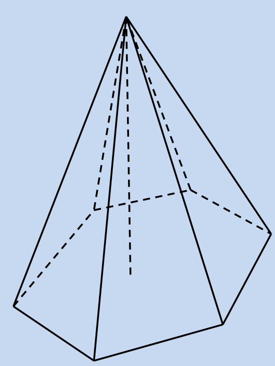


Fig.6.19

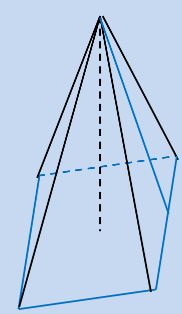


Fig.6.20

Teorema që shprehë vetitë themelore të piramidës

Në qoftë se një piramidë prehet me një rrafsh paralel me bazën, atëherë

- Brinjët anësore të piramidës ndahen në segmente proporcionale;
- Prerja është poligon i ngjashëm me poligonin e bazës;
- Raporti i syprinave të prerjes dhe bazës është i barabartë me raportin e katrorëve të largesave të tyre nga kulmi i piramidës, fig.6.20.

Pohimet e mësipërme mund të vërtetohen lehtë, por me qëllim që libri të mos ngarkohet me detaje teorike, këto fakte po i marrim pa vërtetim.

Teorema për raportin e syprinave të prerjeve

Në qoftë se dy piramida me lartësi të barabarta ndërpriten me rrafshe paralele, me bazat në largësi të barabarta nga kulmet, atëherë syprinat e ndërprerjeve janë proporcionale me syprinat e bazave.

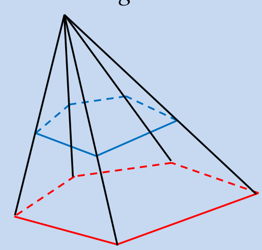


Fig.6.21

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Vëllimi i piramidës

Teorema mbi vëllimet e barabarta të piramidave

Piramidat me baza dhe lartësi të barabarta kanë vëllime të barabarta.

Supozojmë se dy piramida me baza dhe lartësi të barabarta janë vendosur me bazat e tyre në një rrafsh α, fig.6.22. Atëherë çdo rrafsh ndërprerës π që është paralel me rrafshin α formon në ndërprerje me piramidat e dhëna syprian të barabarta. Sipas parimit të Kavalierit, vëllimet e tyre janë të barabarta.

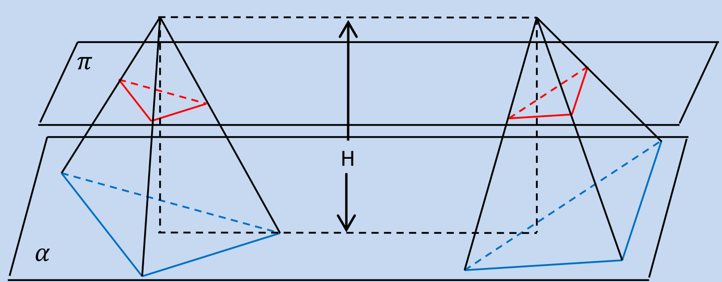


Fig.6.22

Teorema mbi vëllimin e piramidës

Vëllimi i piramidës është i barabartë me një të tretën e prodhimit të bazës me lartësinë.

Teoremën po e vërtetojmë për rastin e piramidës trefaqësore. Ngjashëm bëhet vërtetimi edhe për piramidë të çfarëdoshme.

Le të jetë dhënë piramida trefaqësore $ABCD$. Me bazë në trekëndëshin ABC konstruktojmë piramidën $ABCDEF$ (fig.6.23) të tillë që lartësia e prizmit është e barabartë me lartësinë e piramidës, dhe një brinjë e tij përputhet me brinjën psh AD. Duhet të vërtetojmë se vëllimi i piramidës $ABCD$ është i barabartë me një të tretën e vëllimit të prizmit $ABCDEF$.

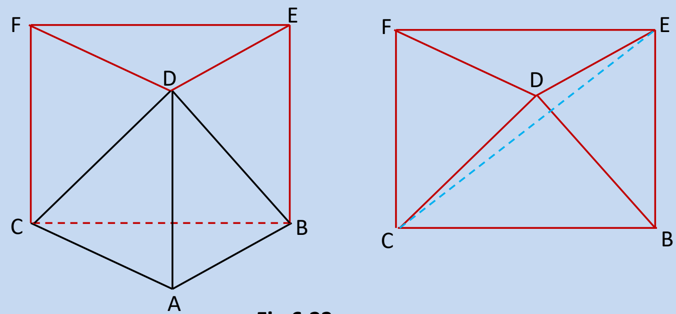


Fig.6.23

Në qoftë se nga prizmi $ABCDEF$ heqim piramidën $ABCD$, do të mbetet piramida katërfaqësore me bazë $CBEF$ dhe kulm në pikën D. Piramidën $CBEFD$ e ndërprejmë me një rrafsh që përmban diagonalen e bazës CE dhe kulmi D. Në këtë mënyrë marrim dy piramida me baza kongruence e me lartësi të barabarta $CBED$ dhe $CEFD$, që kanë vëllime të barabarta (shih: Teorema mbi vëllimet e barabarta të piramidave).

Duke krahasuar cilindo prej tyre me piramidën $ABCD$, vërejmë se shohim se këto piramida kanë po ashtu baza të barabarta dhe lartësi të barabarta, p.sh. piramidat $ABCD$ dhe $DEFC$ kanë bazat kongruente ABC me DEF dhe lartësitë barabarta AE dhe CF. Në këtë mënyrë,
prizmin $ABCDEF$ e kemi nda në tri piramida me vëllime të barabarta
$ABCD$, $CBED$ dhe $CEFD$. Prandaj,

$$V_{i\ prizmit} = 3V_{piramides}.$$

Meqë vëllimi i prizmit është $V = BH$, marrim formulën për vëllimin e piramidës

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se: nxënësit janë në gjendje të përkufizojë sipërfaqen piramide, ta përkufizojë piramidën dhe ta njehsojë vëllimin e piramidës.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **6.4. TRUNGU I PIRAMIDËS**

Njësia mësimore: 6.4.1. Trungu i piramidës

6.4.2. Vëllimi i trungut të piramidës

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **6.4. TRUNGU I PIRAMIDËS**	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Identifikon prizmin, piramidën dhe paralelepipedin dhe pjesët përbërësit të tyre; 2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e paralelepipedit kënddrejtë, prizmit të drejtë dhe piramidës së drejtë;		
Njësia mësimore: 6.4.1. Trungu i piramidës 6.4.2. Vëllimi i trungut të	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon trungun e piramidës		

piramidës	2. Njehson vëllimin e trungut të piramidës

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensionalë;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesionalë;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar trungun e piramidës dhe të njehsoj vëllimin e trungut të piramidës dhe të zbatoi në situata jeta reale.

Fjalët kyçe: përcaktorë, sistem

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

4. Të përkufizoni përcaktorin dhe të interpretoni vetit e tij;

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

d. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj trungun e piramidës dhe të njehsoi vëllimin e piramidës.

Mësimdhënsi

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet piramidë ?
2. Si njehsohet vëllimi i piramidës?
3. Nëse një piramidë prehet me një rrafsh atëherë çfarë trupa fitohet?

e. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësishënon në tabelë:

Trungu i piramidës

Mësimdhënësi përkufizon

Përkufizimi i trungut të piramidës

Trung i piramidës quhet pjesa e piramidës që ndodhet ndërmjet bazës dhe një rrafshi prerës të saj që është paralel me bazën.

Baza e piramidës quhet ***baza e madhe e trungut***, ndërsa pjesa e rrafshit prerës që kufizohet nga mbështjellësi i piramidës quhet ***baza e vogël e piramidës***.

Trungu i piramidës quhet e i rregullt, në qoftë se është pjese një piramide të rregullt. Pjesa e apotemës së faqes së piramidës quhet ***apotemë e trungut të piramidës***. Pjesa e mbështjellësit të piramidës quhet ***mbështjellës i trungut të piramidës***. Faqet e trungut të rregullt të piramidës janë trapeza barakrahësh, fig.6.24.

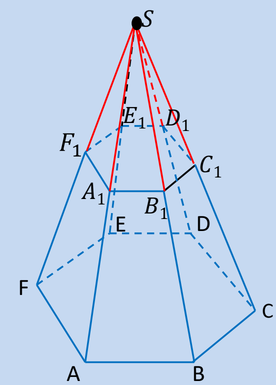


Fig.6.24

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Vëllimi i trungut të piramidës

Teorema mbi vëllimin e trungut të piramidës

Vëllimi i trungut të piramidës është e barabartë me shumën e vëllimeve të tri piramidave, që kanë për lartësi lartësinë e trungut të piramidës dhe për baza: njëra ka bazën e poshtme të trungut të piramidës, tjetra ka bazën e sipërme të piramidës, kurse e treta ka bazën sa mesi gjeometrik i dy bazave të trungut.

Le të jenë B dhe B_1 syprinat e bazave dhe H lartësia e trungut të një piramide të çfarëdoshme. Po marrim për vërtetim një piramidë katërfaqësore. Vërtetimi bëhet ngjashëm për çfarëdo piramide . Dv.

$$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}B_1H + \frac{1}{3}\sqrt{BB_1}H$$

ku $\sqrt{BB_1}$ është mesi gjeometrik i syprinave ku B dhe B_1.

Le të jetë $ABCDK$ piramida, nga e cila merret trungu i vëllimin e të cilit kërkojmë ta njehsojmë.

Vëllimi V i trungut të piramidës është i barabartë me ndryshimin e vëllimeve të trungjeve të piramidave dhe piramidës plotësuese

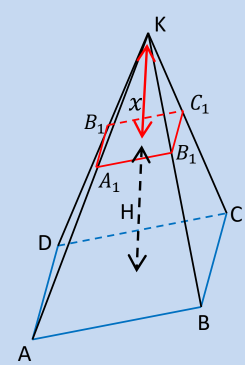


Fig.6.25

Prandaj, nga figura 6.22 shihet se

$$V = \frac{1}{3}B(H + x) + \frac{1}{3}B_1x = \frac{1}{3}[BH + (B - B_1)x] \qquad \ldots (1)$$

Dimë se (Teorema që shprehë vetitë themelore të piramidës, pika 7)

$\frac{B}{B_1} = \frac{(H+x)^2}{x^2}$, prej nga marrim $x = \frac{H(B_1 - \sqrt{BB_1})}{B - B_1}$.

Duke zëvendësuar në barazimin e fundit në (1) marrim

$V = \frac{1}{3}BH + \frac{1}{3}B_1H + \frac{1}{3}\sqrt{BB_1}H$

ose

$$V = \frac{1}{3}\left(B + \frac{1}{3}B_1 + \frac{1}{3}\sqrt{BB_1}\right) \cdot H$$

Shembulli 12. Njehsoni syprinën e dhe vëllimin e piramidës së rregullt katërfaqësore me brinjë të bazës 12cm dhe lartësi 8cm.

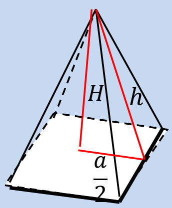


Fig.6.26

Zgjidhja. Vëllimi i piramidës është

$V = \frac{a^2H}{3} = \frac{12^2 \cdot 8}{3} = 384cm^3.$

Nëse me h shënojmë apotemën e piramidës dhe me H lartësine e tij, kemi

$h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow h = 10cm.$

$S = a(a + 2h) = 12 \cdot (12 + 2 \cdot 10) \Rightarrow S = 384cm^2.$

Shembulli 13. Njehsoni syprinën dhe vëllimin e piramidës së rregullt trifaqësore me apotemë 5cm dhe teh anësor 10cm.

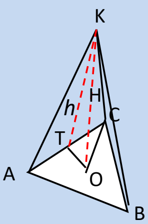


Fig.6.27

Zgjidhja. Syprina e piramidës së rregullt trefaqësore është $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{ah}{2}$

Nga trekëndëshi kënddrejtë COT, fig 6.26, kemi tg $30^0 = \frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{2r}{a}$, prej nga

$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{2r}{a} \Rightarrow a = 2r\sqrt{3},$

ku r është rrezja e rrethit të brendashkruar në bazën e piramidës.

Poashtu nga trekëndëshi COT kemi:

$r^2 = h^2 - H^2 \Rightarrow r = \sqrt{25 - 9} = 4cm,$ rrjedhimisht, $a = 2r\sqrt{3} = 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$

Përfundimisht,

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{ah}{2} = \frac{(8\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{8 \cdot \sqrt{3} \cdot 5}{2} = \cdots = 108\sqrt{3}cm^2.$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}H = \frac{(8\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{12} \cdot 3 = \cdots = 48\sqrt{3}cm^3.$$

Shembulli 14. Njehsoni syprinën dhe vëllimin e trungut të piramidës së rregullt katërfaqësore me brinjë të bazave 28cm dhe 10 cm, nëse lartësia e trungut është 12cm.

Zgjidhja. Nëse me B dhe B_1 shënojmë bazat e trungut të piramidës atëherë kemi

$B = a^2 = 784cm^2$, dhe $B_1 = {a_1}^2 = 100cm^2.$

$$h^2 = H^2 + \left(\frac{a-a_1}{2}\right)^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow h = 15cm.$$

$$M = 4 \cdot \frac{a+a_1}{2} \cdot h = 4 \cdot \frac{28+10}{2} \cdot 15 = 1440cm^2.$$

$$S = B + B_1 + M = 784 + 100 + 1140 = 2024cm^2.$$

$$V = \frac{H}{3}\left(B + \sqrt{BB_1} + B_1\right) = \frac{12}{3}\left(784 + \sqrt{784 \cdot 100} + 100\right) = = \cdots = 4656cm^2.$$

Shembulli 15. Të njehsohen syprina dhe vëllimi i piramidës së rregullt trifaqësore, brinja anësore e së cilës është $10cm$, kurse syprina e mbështjellësit $144cm^2$.

Zgjidhja.

$h^2 = 10 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\quad$ $M = \frac{3ah}{2}$

$h = \frac{1}{2}\sqrt{400 - a^2}$ $\quad$ $144 = \frac{3a}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{400 - a^2}$

$h = \frac{1}{2}\sqrt{400 - 16^2}$ $\quad$ $48 = \frac{a}{4}\sqrt{400 - a^2}$

$h = 6cm$ $\quad$ $192 = a\sqrt{400 - a^2}$

$H^2 = h^2 - r^2$ $\quad$ $a^4 - 400^2 a + 36864 = 0$

$H = \frac{2}{3}\sqrt{33} = 3{,}8$ $\quad$ $a^2 = x$ $\quad$ $S = B + M$

$x^2 - 400x + 36864 = 0$

$S = 64\sqrt{3} + 144$ $\quad$ $x = 256$ $\quad$ $S = 254{,}72cm^2$.

$a = 16$

$V = \frac{1}{3} B \cdot H \Rightarrow V = \frac{1}{3}\frac{256\sqrt{3}}{4} \cdot 3{,}8cm^3$ $V = 140{,}23cm^3$.

Shembulli 16. Piramida e drejtë trifaqësore i ka tehet e bazës $17cm$, $39cm$, $28cm$ dhe tehun anësor $22{,}9cm$. Të njehsohet vëllimi i kësaj piramide

Zgjidhja. Baza e piramidës është:

$$B=\sqrt{42\cdot 3\cdot 14\cdot 25} \qquad (Formula\ e\ Heronit)$$
$$B=210cm^2$$
$$R=\frac{abc}{48} \qquad (rrezja\ e\ rrethit\ të\ jashtashkruar\ në\ trekëndësh).$$
$$R=\frac{39\cdot 17\cdot 28}{4\cdot 210} \qquad H=22{,}9^2-22{,}1^2$$
$$R=22{,}1cm \qquad H=6\,cm$$
$$V=\frac{1}{3}B\cdot H=\frac{210}{3}\cdot 6\Rightarrow V=420cm^3.$$

Shembulli 17. Vëllimi i piramidës së rregullt gjashtëfaqësore është $1024cm^3$, kurse brinja e bazës $\frac{16\sqrt{3}}{3}cm.$ Të njehsohet syprina e trupit

Zgjidhja.

$$V=\frac{a^2H}{2}\cdot\sqrt{3} \qquad S=\frac{3a^2}{2}\sqrt{3}+3ah$$
$$1024=\left(\frac{16\sqrt{3}}{3}\right)^2\cdot\frac{H\sqrt{3}}{2} \qquad S=128\sqrt{3}+256\sqrt{3}$$
$$H=8\sqrt{3}\ cm \qquad S=384\sqrt{3}\ cm^2$$
$$h^2=H^2+\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2$$
$$h=16cm.$$

f. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se: Nëse një piramidë prehet me një kënd formohet një trup që quhet trungu i piramidës dhe nga nxënësi kërkohettë njesoj vëllimin e trungut të piramidës. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por të ketë një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

KAPITULLI 7. TRUPAT RROTULLUES

Tema: **7.1. CILINDRI**

Njësia mësimore: 7.1.1. Sipërfaqja cilindrike.
7.1.2. Syprina dhe vëllimi i cilindrit

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: **7.1. CILINDRI**
</td><td colspan="3">**Rezultati i të nxënit të temës:**
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Identifikon trupat rrotullues dhe pjesët përbërëse të tyre;
2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e cilindrit dhe konit;
3. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e sferës;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 7.1.1.
Sipërfaqja cilindrike.
Syprina dhe vëllimi i cilindrit</td><td colspan="3">**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:**
Nxënësi:
1. Përkufizon sipërfaqen cilindrike;
2. Njehson syprinën e cilindrit
3. Njehson vëllimin e cilindrit</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:**
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensional;</td></tr>
</table>

3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimensional;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar sipërfaqen cilindrike dhe njehsuar syprinën dhe vëllimin e cilindrit dhe të zbatoi në situata reale.

Fjalët kyçe: cilindër, syprinë, sipërfaqe; vëllim

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni sipërfaqen cilindrike;
2. Të njehsoni syprinën e cilindrit të drejt;
3. Të njehsoni vëllimin e cilindrit të drejtë.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj sipërfaqen cilindrike, të njehsoi syprinën dhe vëllimin e cilindrit të drejt.

Mësimdhënësi shtron disa pyetje:

1. Çka quhet rreth?
2. Sa është perimetri i rrethit;
3. Sa është syprina e rrethit;
4. Jepni disa shembuj me trupa rrotullues
5. Si mundë të ndërtohet një sipërfaqe cilindrike

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi përkufizon:

Cilindri

Mësimdhënësi përkufizon:

1. Sipërfaqja cilindrike

Sipërfaqe cilindrike quhet sipërfaqja të cilën e përshkruan një drejtëz p e cila lëvizë nëpër lakore L duke qëndruar paralel me një drejtëz fikse t, fig.7.1.

Drejtëza p quhet *përftues*, ndërsa lakorja L quhet *drejtuese* e sipërfaqes cilindrike. Nëse lakorja

L është e mbyllur, sipërfaqja përkatëse cilindrike quhet *e mbyllur*, fig. 7.2, Në të kundërtën, sipërfaqja cilindrike quhet *e hapur*.

Nëse lakorja L është vi rrethore, sipërfaqja cilindrike quhet *sipërfaqe cilindrike rrethore*, fig. fig.7.3.

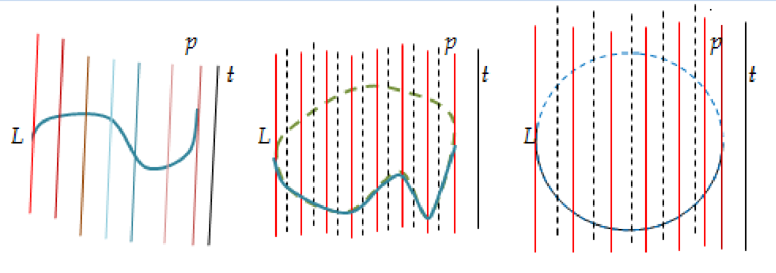


Fig.7.1 Fig.7.2 Fig.7.3

Mësimdhënësi përkufizon cilindrin:

Trupi i kufizuar me dy rrafshe paralele dhe një sipërfaqe cilindrike quhet ***cilindër***.

Prerjet e sipërfaqes cilindrike

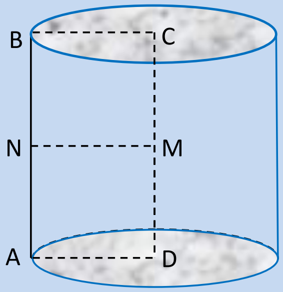


Fig.7.4

me rrafshet prerëse quhen ***bazat e cilindrit***. Pjesa e sipërfaqes cilindrike ndërmjet rrafsheve prerëse quhet ***mbështjellësi*** ose ***sipërfaqja anësore e cilindrit***. Cilindri quhet ***i drejtë*** nëse përftueset e tij janë normale në rrafshet e bazave.

Në të kundërtën, cilindri quhet ***i pjerrtë***.

Cilindri bazat e të cilit janë rrathë, quhet ***cilindër rrethor***.

Ndryshe cilindri i drejtë mund të ndërtohet edhe nëse një drejtkëndësh e rrotullojmë rreth një brinje të tij.

Mësimdhënësi interpreton syprinën:

2. *Syprina e cilindrit*

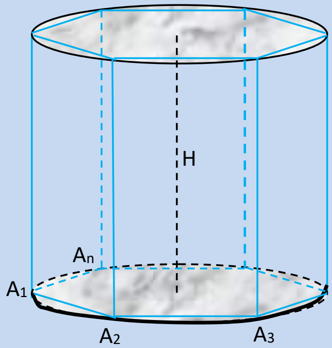


Fig.7.5

Sipërfaqja e anshme e cilindrit është sipërfaqe e përkulur, prandaj matja e saj kërkon disa kuptime dhe fakte ndihmëse. Prandaj po përkufizojmë disa kuptime të reja të cilat na mundësojmë që të arrijmë te formula që shprehë syprinën e sipërfaqes së cilindrit.

Përkufizimi i prizmit të brendashkruar

Prizëm të brendashkruar *në një cilindër e quajmë prizmin bazat e të cilit janë poligon të brendashkruar në bazat e cilindrit.*

Në një cilindër të drejtë rrethor brendashkruajmë një prizëm të rregullt n-faqësor, fig.7.5. Syprina e anshme të prizmit është $M_n = s_n \cdot H$, ku s_n është perimetri i bazës së prizmit, kurse H është lartësia e cilindrit-prizmit. Kur numri i brinjëve të bazës

së prizmit të brendashkruar rritet pakufi shumë herë, atëherë $s_n \longrightarrow 2\pi r$.
Prandaj mbështjellësi i cilindrit është

$$M = 2\pi rH$$

Syprina e përgjithshme e cilindrit është

$$S = 2B + M = 2\pi r^2 + 2\pi rH = 2\pi r(r + H).$$

Pra, përfundimisht

$$\boxed{S = 2\pi r(r + H)}$$

Mësimdhënësi shënon:

3. *Vëllimi i cilindrit*

Përkufizim i vëllimit të cilindrit:

Vëllim i cilindrit *quhet vlera kufitare në të cilën tenton vëllimi i një prizma të rregullt të brendashkruar në cilindër, kur numri i brinjëve të bazës së prizmës rritet pakufi shumë herë.*

Nëse me V_n shënojmë vëllimin e prizmës n-faqësore të brendashkruar në cilindër, ku n është numri i brinjëve të prizmës kurse H lartësinë e prizmës, atëherë

$V_n = B_n \cdot H$.

Kur numri ni brinjëve të bazës së prizmit rritet pakufi shumë, atëherë $B_n \rightarrow B = \pi r^2$dhe $V_n \rightarrow V$. Prandaj, formula për njehsimin e vëllimit të cilindrit është:

$$\boxed{V = \pi r^2 \cdot H}$$

c. *Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura* *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

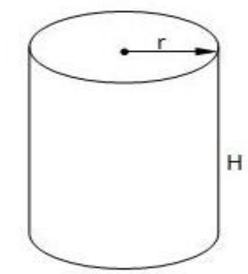
Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit i përvetësojnë sipërfaqet cilindrike, syprina dhe vëllimi i Cilindrit. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

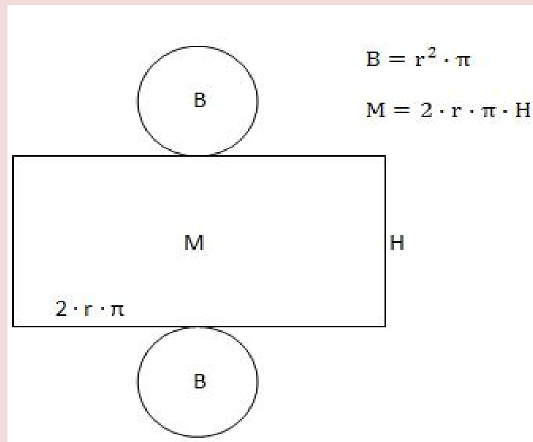
Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.



$$P = 2 \cdot B + M = 2 \cdot r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot H$$

$$P = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (r + H)$$

$$V = B \cdot H = r^2 \cdot \pi \cdot H$$



Tema: **7.2. KONI**
Njësia mësimore: 7.2.1. Sipërfaqja konike.
7.2.2. Syprina dhe vëllimi i konit

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **7.2. KONI**	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Identifikon trupat rrotullues dhe pjesët përbërëse të tyre; 2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe		

	vëllimin e cilindrit dhe konit; 3. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e sferës;
Njësia mësimore: 7.2.1. Sipërfaqja konike. Syprina dhe vëllimi i konit	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** Nxënësi: 1. Përkufizon sipërfaqen konike; 2. Njehson syprinën e konit 3. Njehson vëllimin e konit

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensional;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimensional;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizuar sipërfaqen konike dhe njehsuar syprinën dhe vëllimin e konit dhe të zbatoi në situata reale.

Fjalët kyçe: kon, syprinë, sipërfaqe; vëllim

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni sipërfaqen konike;
2. Të njehsoni syprinën e konit të drejt;
3. Të njehsoni vëllimin e konit të drejtë.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj sipërfaqen konike, të njehsoi syprinën dhe vëllimin e konit të drejt.

Mësimdhënësi shtron disa pyetje:

1. Çka quhet cilindër?
2. Sa është perimetri i bazës së cilindrit;
3. Sa syrina e sipërfaqes anësore (mbështjellësi) e cilindrit;
4. Çka quhet përftuese e sipërfaqes cilindrike
5. Sa është vëllimi i cilindrit
6. Jepni disa shembuj me trupa rrotullues
7. Si mundë të ndërtohet një sipërfaqe cilindrike

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi përkufizon:

Koni

Mësimdhënësi përkufizon:

1. Sipërfaqja konike

Përkufizimi i sipërfaqes konike:

Sipërfaqja që e përshkruan një drejtëz p duke lëvizur nëpër një lakore të mbyllur l dhe duke qëndruar fikse ndaj një pike fikse K, quhet ***sipërfaqe konike****.*

Drejtëza *p* quhet *përftuese*, lakorja *l* quhet *drejtuese,* ndërsa pika K quhet *kulmi* i sipërfaqes konike, fig.7.6.

Përkufizimi i konit.

Trupi i kufizuar nga një sipërfaqe konike dhe një rrafsh prerës që nuk kalon nëpër kulmin e saj, quhet ***kon****.*

Pjesa e sipërfaqes konike e kufizuar nga rrafshi prerës, quhet ***mbështjellës*** ose ***sipërfaqe e anshme e konit***, fig.7.7.

Pjesa e rrafshit e kufizuar nga një sipërfaqe konike, quhet ***baza e konit***. Normalja e lëshuar nga kulmi i konit në rrafshin e bazës, quhet ***lartësi e konit***.

Nëse baza e konit është rreth, koni quhet ***kon rrethor***. Nëse lartësia e konit bie në qendrën e konit, koni quhet ***i drejtë rrethor***.

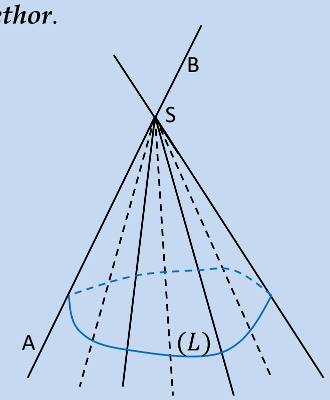


Fig.7.6

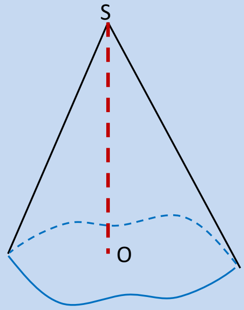


Fig. 6.7

2. *Syprina e sipërfaqes së konit*

Përkufizimi i piramidës së jashtëshkruar:

Piramidë e jashtëshkruar *në një kon quhet piramida baza e të cilës është poligon i jashtëshkruar në bazën e konit, ndërsa kulmi i piramidës është kulm i konit*.

Përkufizimi i syprinës së anshme:

Syprina e anshme *e një koni është vlera kufitare në të cilën tenton syprina e anshme e një piramide të rregullt të jashtëshkruar në kon, kur numri i brinjëve të piramidës dyfishohet pafundësisht shumë herë.*

Syprina e mbështjellësit të piramidës së jashtëshkruar në kon është

$M_n = \frac{s_n}{2} l$,

kus$_n$ është perimetri i bazës së piramidës, l është apotema e piramidës. Kur numri i brinjëve të bazës së piramidës dyfishohet pakufi shumë herë (pra $n \to \infty$), atëherë perimetri i bazës së piramidës s_n tenton te perimetri i rrethit $2\pi r$ dhe $M_n \to M$ mbështjellësi i piramidës M_n tenton te mbështjellësi i konit M (pra $M_n \to M$). Prandaj,

$$M = \frac{2\pi r \cdot l}{2} = \pi r l.$$

D.m.th. $M = \pi r l.$

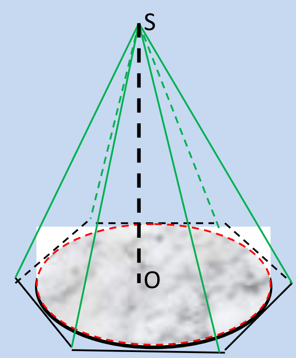


Fig.7.8

Syprina e përgjithshme e konit është

$$S = B + M = \pi r^2 + \pi r l = \pi r(r + l).$$

Pra,

$$\boxed{S = \pi r(r + l)}$$

Mësimdhënësi shkruan në tabelë:

3. *Vëllimi i Konit*

Përkufizimi vëllimit të konit:

Vëllimi i konit *quhet vlera kufitare në të cilën tenton vëllimi i një piramide të rregullt të jashtëshkruar në kon, kur numri i brinjëve të bazës dyfishohet pambarimisht shumë herë.*

Sikur mësuam na kapitullin 6, vëllimi i piramidës është $V_n = \frac{1}{3} B_n \cdot H.$

Kur numri i brinjëve të bazës së piramidës dyfishohet pafundësisht shumë, pra kur $n \to \infty$a, rrjedh që $V_n \to V$, dhe $B_n \to B = \pi r^2$. Prandaj,

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot H}$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit i përvetësojnë sipërfaqet konike, syprina dhe vëllimi i konit. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

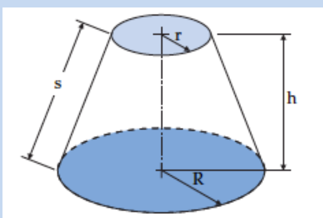
- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **7.2. KONI**

Njësia mësimore: 7.2.4. Syprina dhe trungut të konit

7.2.5 Vëllimi i trungut të konit

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 7.2. KONI

</td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Identifikon trupat rrotullues dhe pjesët përbërëse të tyre;
2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e cilindrit dhe konit;
3. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e sferës;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 7.3.1.
Syprina dhe vëllimi i trungut të konit</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
Nxënësi:
1. Njehson syprinën e trungut të konit
2. Njehson vëllimin e trungut të konit</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensional;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimensional;</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për të njehsuar syprinën dhe vëllimin e trungut të konit dhe të zbatoi në situata reale.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Fjalët kyçe:</u> kon, syprinë, sipërfaqe; vëllim</td></tr>
<tr><td colspan="4">Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore</td></tr>
</table>

1. Të njehsoni syprinën e trungut të konit të drejt;
2. Të njehsoni vëllimin e trungut të konit të drejtë.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj sipërfaqen konike, të njehsoi syprinën dhe vëllimin e konit të drejt.

Mësimdhënësi shtron disa pyetje:

3. Çka quhet kon?
4. Sa është perimetri i bazës së konit?
5. Sa është syprina e sipërfaqes anësore (mbështjellësi) e konit?
6. Sa është vëllimi i konit?
7. Në se një kon prehet me në rrafsh, atëherë çka mund të fitohet?

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Trungu i konit

Mësimdhënësi përkufizon:

Përkufizimi trungut të konit:

Trung i konit *quhet pjesa e konit e cila ndodhet ndërmjet bazës së konit dhe një rrafshi i cili e ndërpret konin, është paralel me bazën e tij dhe nuk kalon nëpër kulmin e konit.*

Pjesa e mbështjellësit të konit që ndodhet ndërmjet bazës së konit dhe rrafshit prerës, paralel me rrafshin e bazës, quhet ***mbështjellësi i trungut*** ose sipërfaqe anësore e trungut të konit. Baza e konit dhe rrethi i rrafshit prerës me mbështjellësin e konit, quhen ***bazat e trungut***.

Pjesa e apotemës së konit që ndodhet ndërmjet bazave të trungut të konit, quhet ***apotema e trungut të konit***.

4. *Syprina e sipërfaqes së trungut të Konit*

Teorema 1. *Syprina e mbështjellësit të trungut të konit është baras me prodhimin e gjysmës së* *perimetrave të bazave me apotemën.*

Vërtetimi. Në trungun e konit jashtëshkruajmë një trung të piramidës së rregullt, bazat e të cilit janë poligone të rregullt të jashtëshkruar në baza të konit, fig.7.9.

Nëse shënojmë me s_n, s'_n dhe l perimetrin e bazës së poshtme, perimetrin e bazës së sipërme dhe apotemën e trungut të trungut të piramidës përkatësisht. Atëherë ,

$M_n = \frac{1}{2}(s_n + s'_n).$

Kur numri i brinjëve të bazave të trungut të piramidës dyfishohet pambarimisht shumë, atëherë $s_n \to 2\pi R, s'_n \to 2\pi r$, ku R është rrezja e bazës së poshtme të trungut, r është rrezja e bazës së sipërme të trungut, ndërsa$2\pi R$ është perimetri i bazës së poshtme të trungut , $2\pi r$ështëperimetri i bazës sipërme të trungut. D.m.th.

$$M = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi r) = \pi(R + r)l.$$

Prandaj, $M = \pi(R + r)l.$

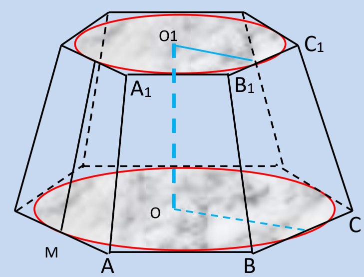


Fig.7.8

Syprina e përgjithshme e trungut të konit është

$S = B_1 + B_2 + M = \pi R^2 + \pi r^2 + (R + r)l = \pi(R^2 + r^2 + Rl + rl).$

Përfundimisht, syprina e trungut të konit njehsohet me formulën

$$\boxed{S = \pi(R^2 + r^2 + Rl + rl)}$$

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

5. *Vëllimi i trungut të konit*

Teorema 2. *Vëllimi trungut të konit është e barabartë me shumën e vëllimeve të tri koneve që kanë lartësi të barabartë me lartësinë e trungut të konit, ndërsa baza e konit të parë është e barabartë me bazën e poshtme të trungut të konit, baza e konit të dytë është e barabartë me bazën e sipërme të trungut të konit, ndërsa baza e konit të tretë është e barabartë me mesin gjeometrik të dy bazave të trungut të konit.*

Vërtetimi: Vërtetimi i kësaj teoreme bëhet ngjashëm si vërtetimi i teoremës për vëllimin e trungut të piramidës. Trungun e konit e plotësojmë me një kon që ka për bazë bazën e sipërme të trungut të konit dhe përftueset e tij janë vazhdim i përftuesve të trungut të konit. Në këtë mënyrë fitojmë konin me bazë në bazën e poshtme të trungut të konit e kulm në pikën K dhe konin tjetër me bazë në bazën e sipërme të trungut të konit e me kulm poashtu në kulmin e konit (pikën K), fig 7.9. Vëllimi i trungut të konit është i barabartë me ndryshimin e vëllimit të konit me bazë në bazën e poshtme trungut të konit dhe konit tjetër që ka për bazë bazën e sipërme të trungut të konit.

Nëse shënojmë me H lartësinë e trungut të konit dhe me h

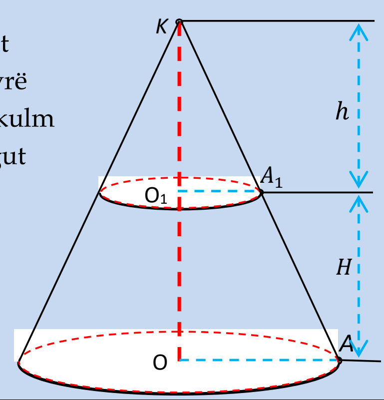


Fig.7.9

lartësinë e trungut të konit “vogël”, kemi

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(H+h)-\frac{1}{3}\pi r^2 h=$$

$$=\frac{1}{3}\pi R^2 H+\frac{1}{3}\pi R^2 h-\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$=\frac{1}{3}\pi(R^2 H+(R^2-r^2)h) \qquad (*)$$

Nga ngjashmëria e trekëndëshave AOK dhe A_1O_1K marrim

$$\frac{R}{r}=\frac{H+h}{h}\Rightarrow h=\frac{rH}{R-r}$$

Duke zëvendësuar shprehjen e fundit në barazimin (*) marrim

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(R^2H+(R-h)(R-h)\frac{rH}{R-r}\right)=\frac{1}{3}\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{1}{3}\pi Rrh.$$

Vërejmë se $\pi Rr=\sqrt{\pi R^2\cdot\pi r^2}$, që dmth se πRr paraqet mesin gjeometrik të bazave të trungut të konit.

Përfundimisht, formula për njehsimin e vëllimit të trungut të konit është

$$\boxed{V=\frac{1}{3}\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi r^2h+\frac{1}{3}\pi Rrh}$$

që vërteton pohimin e teoremës.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

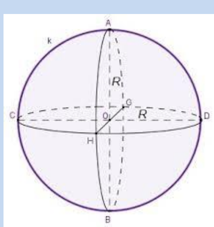
Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim

për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.
P.sh. vije në përfundim se nxënësit i përvetësojnë syprinën dhe vëllimin e trungut të konit. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **7.3. SFERA**
Njësia mësimore: 7.3.1. Sipërfaqja sferikë
7.3.2. Syprina e sipërfaqes sferike

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **7.3. SFERA** 	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Identifikon trupat rrotullues dhe pjesët përbërëse të tyre; 2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e cilindrit dhe konit; 3. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e sferës;		
Njësia mësimore: 7.3.1. Sipërfaqja sferikë 7.3.2. Syprina e sipërfaqes sferike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** Nxënësi: 1. Përkufizon sipërfaqen sferike 2. Njehson syprinën e sipërfaqes sferike		

Trupat rrotullues

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensional;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimensional;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive për sferën, sipërfaqen sferike dhe syprinën e sipërfaqes sferike dhe të zbatoi në situata reale.

Fjalët kyçe: Sferë, sipërfaqe sferike, syprinë

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni sipërfaqen sferike
2. Të njehsoni syprinën e sipërfaqes sferike

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përkufizoj sipërfaqen sferike, dhe të njehsoi syprinën e sipërfaqes sferike.

Mësimdhënësi shtron disa pyetje:

1. Çka quhet rreth?
2. Sa është perimetri i rrethit, të shënohet në tabelë?
3. Çka quhet sipërfaqe sferike?
4. Si ndërtohet një sipërfaqe sferike?(mendoni njërreth dhe rrotulli me një shpejtësi të madhe).

a. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Sfera

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

1. *Sipërfaqja sferike*

Mësimdhënësi përkufizon:

Sipërfaqe sferike *quhet sipërfaqja rrotulluese e cila përshkruhet nga rrotullimi i plotë i një gjysmë rrethi rreth një diametri të tij.*

Ose

Sipërfaqja sferike përkufizohet edhe si bashkësi pikash në hapësirë që janë baras të larguara nga një pikë fikse, që quhet *qendra* e sipërfaqes sferike.

Qendra e sipërfaqes sferike quhet ***qendër e sferës***.

Segmenti që bashkon qendrën e sipërfaqes sferike me cilëndo pikë të saj quhet ***rreze e sipërfaqes sferike*** ose ***rreze e sferës***.

Segmenti që bashkon dy pika të sipërfaqes sferike dhe kalon nëpër qendrën e saj quhet ***diametër i sipërfaqes sferike***.

Prerja e sipërfaqes sferike me një rrafsh është rreth.

Rrafshi që e takon sipërfaqen sferike në një pikë quhet ***rrafsh tangjencial***.

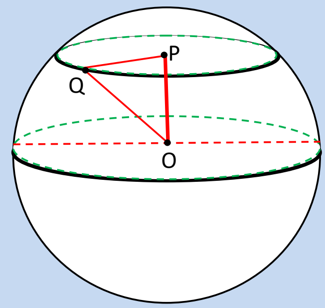


Fig.7.10

Të shqyrtojmë tash pozitat reciproke të një sipërfaqe sferike dhe një rrafshi. Nëse është dhënë një sipërfaqe sferike me qendër në pikën O e me rreze R dhe një rrafsh π.

Shënojmë me $d = d(O, \pi)$ distancën e qendrësOnga rrafshi π.

Nëse $d = d(O, \pi) < R$, rrafshi dhe sipërfaqja sferike priten sipas një rrethi;

Nëse $d = d(O, \pi) = R$, rrafshi dhe sipërfaqja sferike takohen në një pikë- rrafshi është tangjencial ndaj sipërfaqes sferike;

Nëse $d = d(O, \pi) > R$, rrafshi dhe sipërfaqja sferike nuk kanë pika të përbashkëta.

Përkufizimi i drejtëzës tangjente:

Drejtëza që e takon sipërfaqen sferike në një pikë, quhet ***drejtëz tangjente e sipërfaqes sferike***.

Nga një pikë jashtë sipërfaqes sferike mund të hiqen një tufë (pakufi shumë) tangjentesh. Segmentet tangjencial të të gjitha tangjenteve janë të barabartë, fig.7.11.

Bashkësia e tangjenteve në një sipërfaqe sferike formon një sipërfaqe ***konike rrethore***. Sipërfaqja konike e tillë e takon sipërfaqen sferike sipas një rrethi, fig.7.12.

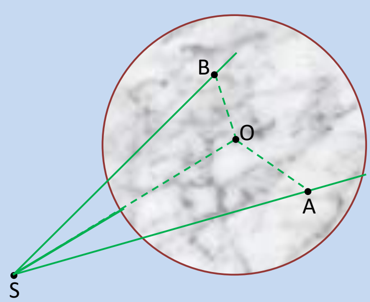


Fig. 7.11

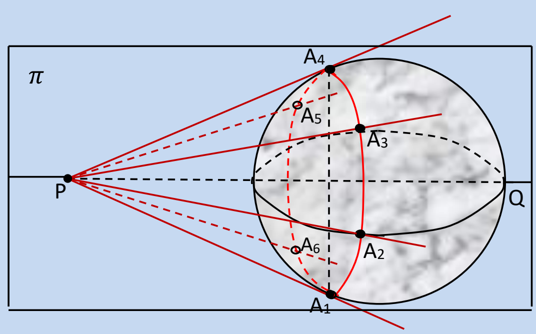


Fig. 7.12

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Syprina e sipërfaqes sferike

Deri tani kemi mësuar për disa nga sipërfaqet rrotulluese dhe kemi mësuar formulat për njehsimin e syprinës së tyre, si për shembull kemi mësuar njehsimin e syprinës së konit, trungut të konit dhe të cilindrit.

Edhe sipërfaqja sferike është sipërfaqe rrotulluese, por syprinën e saj nuk mund ta njehsojmë me "mjetet gjeometrike" që dimë deri tash. Për këtë qëllim po vërtetojmë një teoremë të përgjithshme për njehsimin e syprinës së konit, trungut të konit dhe të cilindrit, e cila teoremë do të shërbej për nxjerrjen e formulave për njehsimin e syprinës së sferës dhe pjesëve të saj.

Teorema 3. *Syprina e sipërfaqes së mbështjellësit të konit, trungut të konit dhe cilindrit është e barabartë me prodhimin e lartësisë së tij me perimetrin e një rrethi me rreze sa pjesa e normales në përftuese të hequr nga mesi i përftueses deri në prerjen e saj me boshtin e rrotullimit.*

Vërtetimi. Vërtetimin e teoremës do ta bëjmë në tri pjesë. Le të jetë ABC një trekëndësh kënddrejtë i cili rrotullohet rreth katetit AC. Me këtë rast fitojmë konin me bazë rrethin me rreze BCdhe lartësi AC. Shënojmë me$S$ mesin përftueses AB, ndërsame T shënojmëpikën në të cilën normalja n e pret boshtin e konit, fig. 7.13.

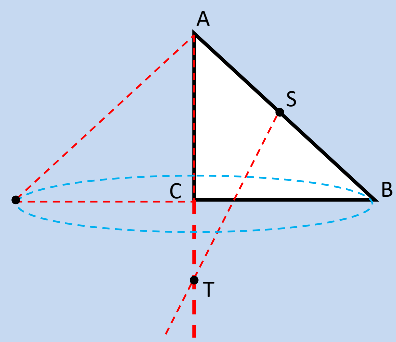


Fig. 7.13

Sikur e dimë, syprina e mbështjellësit të konit njehsohet me formulën $M = \pi Rl$,ku R është rrezja e rrethit të bazës ndërsa l është përftuesja e konit. Në rastin tonë rrezja është brinja $\overline{BC}$, përftuesja është $\overline{AB}$ kurse lartësia e konit është $\overline{AC}$.

Prandaj, formula për njehsimin e syprinës së mbështjellësit të konit merr formën

$$M = \overline{BC} \cdot \pi \cdot \overline{AB} \text{apo}$$

$$M = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot 2\pi \cdot \overline{AB} = \overline{BC} \cdot 2\pi \cdot \overline{SA}, \qquad (1)$$

ku$\overline{SA} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Nga ana tjetër vërejmë se $\triangle ABC \sim \triangle ATS$, praj nga marrim $\overline{AC} : \overline{SA} = \overline{BC} : \overline{ST}$ e prej këtu

$$\overline{AC} \cdot \overline{ST} = \overline{BC} \cdot \overline{SA}.$$

Duke zëvendësuar në (1) marrim

$$M = \overline{AC} \cdot 2\pi \cdot \overline{ST}$$

që duhej vërtetuar.

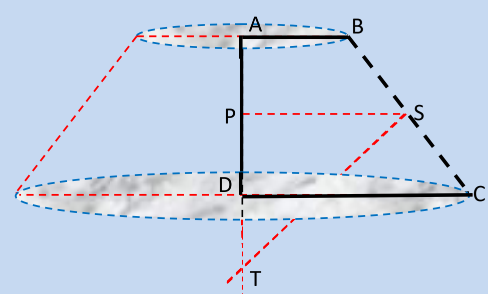


Fig.7.14

Le të jetë $ABCD$ një trapez kënddrejtëve kënde të drejta te kulmet A dhe D. Duke rrotulluar trapezin rreth brinjës AD fitohet trungu i konit me baza rrathët me rreze CD dhe AB, ndërsa me lartësi AD. Shënojmë me Smesin e përftueses BC dhe T shënojmë pikën në të cilën normalja n e konstruktuar në përftuesenBC, nëpër pikën S, e pret boshtin e rrotullimit AD, fig. 7.14.

Në pikën 10 mësuam se syprina e mbështjellësit të trungut të trapezit njehsohet me formulën

$$M = \pi(R + r) \cdot l.$$

Në rastin tonëështër $= \overline{AB}$, $R = \overline{CD}$ dhe $l = \overline{BC}$. Prandaj formula e mësipërme merr formën

$$M = \pi(\overline{CD} + \overline{AB}) \cdot \overline{BC}.$$

apo

$$M = 2\pi \frac{\overline{CD}+\overline{AB}}{2} \cdot \overline{BC} = 2\pi \cdot \overline{PS} \cdot \overline{BC}, \qquad (2)$$

ku $\overline{PS} = \frac{\overline{CD}+\overline{AB}}{2}$.

Nga figura 7.14 vërejmë se $\Delta SPT \sim \Delta BHC$, prej nga marrim

$$\overline{SP}:\overline{ST} = \overline{BH}:\overline{BC}, \text{nga marrim } \overline{SP} \cdot \overline{BC} = \overline{ST} \cdot \overline{BH}.$$

Duke zëvendësuar (2) marrim

$$M = 2\pi \cdot \overline{ST} \cdot \overline{BH},$$

që vërteton pohimin e teoremës.

b. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit i përkufizojnë sipërfaqen sferike, përvetësojnë atë dhe janë në gjendje të njehsojnë syprinë e sipërfaqes sferike. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

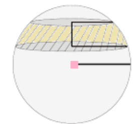
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **7.3. SFERA**

Njësitë mësimore: 7.3.3. Syprina e zonës sferike
7.3.4. Syprina e kësulës sferike
7.3.5. Syprina e sipërfaqes sferike



<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 7.3. SFERA
 </td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Identifikon trupat rrotullues dhe pjesët përbërëse të tyre;
2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e cilindrit dhe konit;
3. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e sferës;</td></tr>
<tr><td>Njësitë mësimore:
7.3.3. Syprina e zonës sferike
7.3.4. Syprina e kësulës sferike
7.3.5. Syprina e sipërfaqes sferike</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
Nxënësi:
1. Njehson syprinën e sipërfaqes së zonës sferike
2. Njehson syprinën e sipërfaqes së kësulës sferike
3. Njehson syprinën e sipërfaqes sferike</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensional;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimensional;</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Qasja e të nxënit:</u>
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive për njehsimin e syprinës të zonës sferike, kësulës sferike, dhe</td></tr>
</table>

sypriën e sferës si dhe të zbatoi ato në kontekst real reale.

Fjalët kyçe: Sferë, zonë sferike, kësulë sferike, syprinë sferike

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të njehsoni syprinën e sipërfaqes së zonës sferike
2. Të njehsoni syprinën e sipërfaqes së kësulës sferike
3. Të njehsoni syprinën e sipërfaqes sferike

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të njehsoi syprinën e zonës sferike, kësulës sferike dhe të njehsoi syprinën e sipërfaqes sferike.

Mësimdhënësi shtron disa pyetje:

1. Çka quhet rreth?
2. Sa është perimetri i rrethit, të shënohet në tabelë?
3. Si e kuptoni sipërfaqen sferike?
4. Si mund të fitohet një zonë sferike
5. Si mund të ndërtohet një kësulë sferike

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

3. *Syprina e zonës sferike*

Mësimdhënësi:

Syprinë e një zone sferike e përshkruar nga një hark rrethor $\widehat{CD}$, i cili rrotullohet rreth një diametri AB, është vlera kufitare në të cilën tenton syprina e sipërfaqes së përshkruar nga një vijë poligonale e rregullt,e brendashkruar në harkun $\widehat{CD}$ duke u rrotulluar rreth diametrit AB, kur numri i brinjëve të vijës poligonale të dyfishohet pakufi shumë herë.

Teorema 4. *Syprina e një zone sferike është e barabartë me prodhimin e perimetrit të një rrethi të madh të zonës sferike me lartësinë e tij.*

Vërtetimi. Supozojmë se shtresa sferike është fituar me rrotullimin e harkut rrethor $\widehat{CD}$ rreth diametrit AB. Në harkun rrethor $\widehat{CD}$ brendashkruajmë një vijë të rregullt poligonale.Me rrotullimin e vijës poligonale, bashkë me harkun rrethor, secila nga brinjët e vijës poligonale përshkruan një mbështjellës të trungut të konit. Siç kemi vërtetuar më parë, këto syprina janë të barabarta me prodhimin e perimetrit të rrethit, rrezja e të cilit është baras me rrezen e rrethit të brendashkruar në vijën e rregullt poligonale me lartësinë përkatëse.

Le të jetë $CC_1C_2 \ldots C_{n-1}D$ vija a rregullt poligonale e brendashkruar në harkun $\widehat{CD}$. Syprina e sipërfaqes që e përshkruan secila nga brinjët e vijës poligonale është:

$$S_1 = 2\pi\, d(O,O_n) \cdot d(C',C'_1), \ldots.$$

ku me O_n kemi shënuar mesin e brinjës CC_1, ndërsa me $C'C'_1$ lartësinë e zones dhe kështu vazhdojmë me radhe me brinjët tjera poligonale, fig. 7.18.

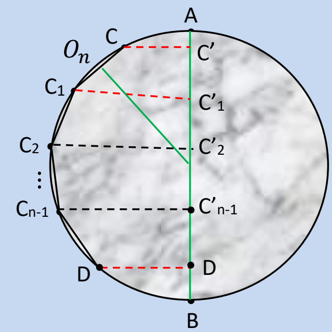


Fig. 7.18

Shuma e të gjitha syprinave të anshme të trungjeve të koneve është

$$S_n = 2\pi d(O,O_n)\left[\, d(C',C'_1) + d(C',C'_1) + \cdots + d(C',C'_1)\right] = 2\pi \cdot d(O,O_n) \cdot d(C',D').$$

Kur numri i brinjëve të vijës poligonale dyfishohet pambarimisht shumë herë, atëherë $d(O,O_n)$ tenton në rrezen e sferës, S_n tenton në syprinën e shtresës sferike S, ndërsa lartësia$H$ e zonës sferike mbetet e pandryshuar. Prandaj barazimi i fundit merr formën

$$S = 2\pi RH.$$

Pra, syprina e shtresës sferike njehsohet me formulën

$$S = 2\pi RH$$

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

4. *Syprina e kësulës sferike*

Sikur mësuam në pikën 12, kësula sferike është sipërfaqe rrotulluese e cila fitohet duke rrotulluar një hark rrethor rreth një diametri të rrethit, në rast se një nga pikat e skajshme të harkut i takon boshtit të rrotullimit. Prandaj, sipërfaqja e kësulës sferikë është një rast i veçantë i shtresës sferike.

Teorema 5. *Syprina e kësulës sferike është baras me prodhimin e lartësisë së tij me perimetrin e një rrethi të madh të sferës.*

Vërtetimi. Le të jetë $\widehat{AC}$harku i cili duke u rrotulluar rreth diametrit AB përshkruan sipërfaqene kësulës sferike.

Në harkun $\widehat{AC}$ brendashkruajmë një vi të rregullt poligonale $AC_1C_2 \ldots C_nC$, fig. 7.19.
Duke zbatuar teoremën, sikur në rastin e zonës sferike, marrim syprinën e sipërfaqes rrotulluese e cila merret me rrotullimin e vijës poligonale rreth diametrit AB:

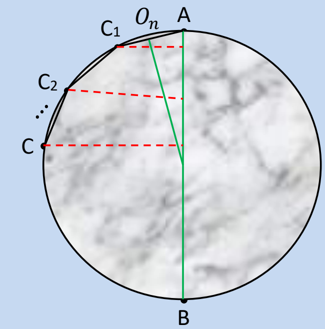


Fig. 7.19

$$S_n = 2\pi \cdot d(O, O_n) \cdot d(A', C').$$

Kur numri n i brinjëve të vijës poligonale dyfishohet pafundësisht shumë herë,madhësia$d(O, O_n)$ tenton në rrezen e sferës, lartësia e kësulës mbetet e pandryshueshme,ndërsa syprina e sipërfaqes rrotulluese të vijës poligonale tenton në sipërfaqen e kësulës sferike. Pra,

$$\boxed{S = 2\pi RH}$$

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

5. *Syprina e sipërfaqes sferike*

Mësimdhënësi interpreton teoremën

Teorema 6. *Syprina e sipërfaqes sferike është e barabartë me prodhim e perimetrit të një rrethi të madh të sferës me diametrin e sferës (ose me katërfishin e syprinës së një rrethi të madh të sferës).*

Vërtetimi. Sipërfaqja sferike përshkruhet kur një gjysmërreth rrotullohet rreth diametrit të tij AB. Por, syprinën e sipërfaqes sferike mund ta njehsojmë edhe si shumë të syprinave të dy kësulave sferike që përshkruhen duke rrotulluarharqet rrethore AC dhe BC rreth diametrit AB, fig.7.20, ku C është një pikë e harkut rrethor AB e ndryshme nga skajet$A$ dhe B. Ngjashëmsi në pikë 13, nëse me S_1 dh S_2 shënojmë syprinat përkatëse të këtyre kësulave, kemi

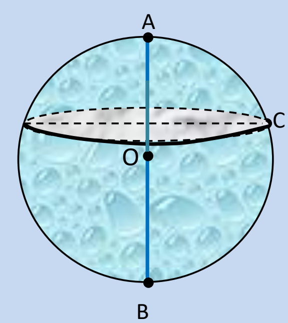


Fig.7.20

$$S_1 = 2\pi \cdot R \cdot d(A, C').$$

dhe

$$S_2 = 2\pi \cdot R \cdot d(C', B),$$

ku me R kemi shënuar rrezen e sferës, kurse me$d(A, C')$ dhe $d(C', B)$janë shënuar lartësitë e kësulave S_1 dhe S_2 përkatësisht.
Prandaj, syprina e sferës është

$$S = S_1 + S_2$$

ose

$$S = 2\pi \cdot R \cdot d(A, C') + 2\pi \cdot R \cdot d(C', B) = 2\pi \cdot R \cdot [d(A, C') + d(C', B)],$$

Meqë $d(A, C') + d(C', B) = 2R$, formula e fundit merr formën S= $2\pi \cdot R \cdot 2R$ ose

$$\boxed{S = 4\pi \cdot R^2}$$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.
Vlerësimi i nxënësve Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja. Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se nxënësit e njehsojnë syprinën e zonës sferike, kësulës sferike dhe sferës. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit për njësitë dhe me rezultate të njësive të tjera i arrijnë rezultate e të nxënit për teme e kështu përmes arritjeve të rezultateve arrijnë përmbushjen e kompetencave. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **3. SFERËS**

Njësia mësimore: 3.6. Teorema e përgjithshme për vëllimin e trupave rrotullues
3.7. Vëllimi i sektorit sferik

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Forma, hapësira, matjet dhe**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Lënda mësimore: MATEMATIKË	**gjeometria**		

Tema: **3. SFERA**	**Rezultati i të nxënit të temës:** *Nxënësi do të jetë në gjendje të:* 1. Identifikon trupat rrotullues dhe pjesët përbërëse të tyre; 2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e cilindrit dhe konit; 3. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e sferës;
Njësia mësimore: 3.6. Teorema e përgjithshme për vëllimin e trupave rrotullues 3.7. Vëllimi i sektorit sferik	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Interpreton teoremën për vëllimin e trupave rrotullues; 2. Njehson vëllimin e sektorit sferik;

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre dimensional;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesional;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për disa informata që duhet shfytëzuar për njehsimin e vëllimit të trupave rrotullues dhe për të njehsuar vëllimin e sektorit sferik si dhe të zbatoi në situata reale.

Fjalët kyçe: teorem për vëllim të trupave, vëllim i sektorit sferik.

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të interpretoni teoremën për vëllimin e trupave rrotullues;
2. Të njehson vëllimin e sektorit sferik;

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të interpretoi teoremën për njehsimin e vëllimit të trpave rrotullues dhe njehsimin e sektorit rrethor.

Mësimdhënësi:

Shtron pyetje. P.sh.

1. Çka quhet sferë;
2. Si është formula e syprinës së sferës;
3. Çka quhet sektor sferik;
4. Si është formula e syprinës së sektorit sferik;

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Teorema e përgjithshme për vëllimin e trupave rrotullues

Mësimdhënësi interpreton teoremën: Për gjetjen e formulës me të cilën njehsohet vëllimi i sferës dhe pjesëve të saj.

Teorema 7. *Vëllimi i trupit të formuar, kur një trekëndësh ABC rrotullohet rreth një boshti që gjendet në rrafshin e tij dhe kalon nëpër një kulm të tij, duke mos ndërprerë brinjën përballë, është i barabartë me prodhimin e syprinës së përshkruar nga ajo brinjë me një të tretën e lartësisë të saj të lëshuar nga kulmi përballë i trekëndëshit.*

Vërtetimi: Le të jetë ABC një trekëndësh dhe le të jetë d një bosht rrotullimi i cili përmban kulmin A dhe nuk e ndërpret brinjën përballë BC. Shënojmë me h lartësinë AD të hequr nga kulmi A në brinjën BC.Për vërtetimin e plotë të teoremës dallojmë rastet:

1. Boshti d përmban brinjën AB. Le të jetë CE normalja e lëshuar nga pika

C në boshtin d, fig. 7.21. Vëllimi i trupit rrotullues që fitohet me rrotullimin e trekëndëshit ABC rreth boshtit d është baras me shumën e vëllimeve të dy koneve që formohen me rrotullimin e trekëndëshave ACE dhe BCE kur rrotullohen rreth boshtit d. Nëse me V_1 dhe V_2 shënojmë vëllimet përkatëse të tyre, atëherë:

$$V_1 = \frac{1}{3}d(C,E)^2 \cdot \pi \cdot d(A,E) \quad \text{dhe} \quad V_2 = \frac{1}{3}d(C,E)^2 \cdot \pi \cdot d(B,E).$$

Vëllimi i trupit rrotullues të fituar me këtë rast është

$$V = V_1 + V_2$$

$$V = \frac{1}{3}d(C,E)^2 \cdot \pi \cdot [d(A,E) + d(B,E)] = \frac{1}{3}d(C,E)^2 \cdot \pi \cdot d(A,B).$$

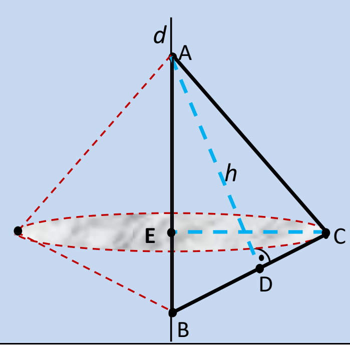


Fig.7.21

Formulën e fundit mund ta shkruajmë në formën

$$V=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot d(C,E)\cdot d(A,B).d(C,E)\qquad(1)$$

Nga fakti se $\Delta ABD\sim\Delta BCE$,marrim$CE:AD=BC:AB$,prej nga $CE\cdot AB=BC\cdot AD$. Duke zëvendësuar këtë shprehje në barazimin (1) marrim:

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot d(B,C)\cdot d(A,D).d(C,E).$$

ose

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot d(B,C)\cdot d(C,E).h.\quad(2)$$

Prodhimi $\pi\cdot d(B,C)\cdot d(C,E)$ paraqet syprinën e mbështjellësit të konit të cilën e përshkruan brinja BC. Shprehja e dhënë me formulën (2), vërteton pohimin e teoremës.

2. Boshti d nuk përmban asnjërën nga brinjët e trekëndëshit, fig.7.22. Shënojmë me E pikën në të cilën boshti d pret vazhdimin e brinjësBC. Vëllimi i kërkuar i trupit rrotullues që formohet me rrotullimin e trekëndëshitABC rreth boshtit d është i barabartë me ndryshimin e vëllimeve të trupave që formohen me rrotullimin e trekëndëshaveABE dhe ACE. Në bazë të asaj që vërtetuam në rastin 1 kemi:

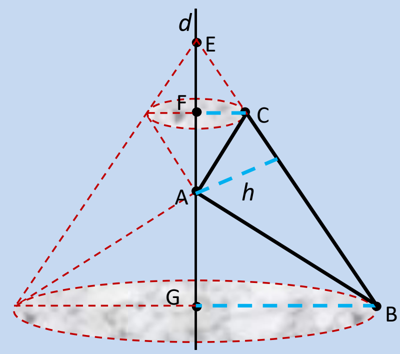


Fig. 7.22

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\overline{BE}\cdot\overline{BG}\cdot h-\frac{1}{3}\pi\cdot\overline{CE}\cdot\overline{CF}\cdot h$$

ose

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot h[\overline{BE}\cdot\overline{BG}-\overline{CE}\cdot\overline{CF}]\qquad(3)$$

Nga ngjashmëria e trekëndëshave BGE dheCFEkemi $\overline{BE}:\overline{BG}=\overline{CE}:\overline{CF}$, prej nga marrim $\overline{BE}\cdot\overline{CF}=\overline{BG}\cdot\overline{CE}$. Nga ana tjetër nga figura shohim $\overline{BE}-\overline{CE}=\overline{BC}$. Duke zgjidhur sistemin e ekuacioneve lineare

$$\begin{cases}\overline{BE}\cdot\overline{CF}=\overline{BG}\cdot\overline{CE}\\ \overline{BE}-\overline{CE}=\overline{BC}\end{cases},\ \text{sipas}\overline{BE}\ \text{dhe}\ \overline{CE}\ \text{marrim}\overline{BE}=\frac{\overline{BG}\cdot\overline{BC}}{\overline{BG}-\overline{CF}}\text{dhe}\overline{CE}=\frac{\overline{CF}\cdot\overline{BC}}{\overline{BG}-\overline{CF}}.$$

Duke zëvendësuar$\overline{BE}$ dhe $\overline{CE}$ nga barazimet e fundit në barazimin (3) marrim

$$V=\frac{1}{3}\pi h\left[\frac{\overline{BC}\cdot\overline{BG}}{\overline{BG}-\overline{CF}}\cdot\overline{BG}-\frac{\overline{BC}\cdot\overline{CF}}{\overline{BG}-\overline{CF}}\cdot\overline{CF}\right]=\frac{1}{3}\pi h\frac{\overline{BG}^2-\overline{CF}^2}{\overline{BG}-\overline{CF}}\cdot\overline{BC}=$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\frac{(\overline{BG}-\overline{CF})(\overline{BG}+\overline{CF})}{\overline{BG}-\overline{CF}}\cdot\overline{BC}=\frac{1}{3}\pi h\cdot\overline{BC}\cdot(\overline{BG}+\overline{CF}).$$

Pra,

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{BG} + \overline{CF}).$$

Prodhimi $\pi \cdot \overline{BC} \cdot (\overline{BG} + \overline{CF})$ paraqet syprinën e mbështjellësit të trungut të konit të përshkruar nga brinja BC gjatë rrotullimit rreth boshtit d.

3. Boshti d është paralel me brinjën BC. Në këtë rast vëllimi i trupit rrotullues Që merret me rrotullimin e trekëndëshit ABC rreth boshtit d është i barabartë me ndryshimin e vëllimit të cilindrit që merret me rrotullimin drejtkëndëshit $BCDE$ e brinjës BC dhe vëllimeve të dy koneve të formuar nga rrotullimi i trekëndëshave ABD dhe ACE rreth boshtit d. Pra,

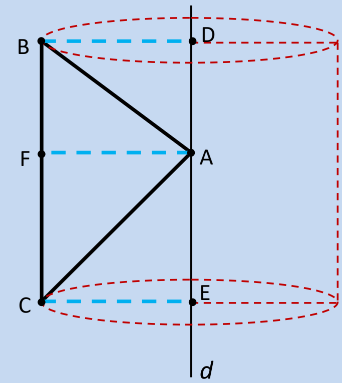


Fig. 7. 23

$$V = \pi\, \overline{AF}^2 \cdot \overline{ED} - \frac{1}{3}\pi\, \overline{AF}^2 \cdot \overline{AE} - \frac{1}{3}\pi \overline{AF}^2 \cdot \overline{AD},$$

prej nga marrim $$V = \frac{1}{3}\overline{AF} \cdot 2\pi\, \overline{AF} \cdot \overline{BC}\ .$$

Prodhimi $2\pi\, \overline{AF} \cdot \overline{BC}$ paraqet syprinën e mbështjellësit të cilindrit të cilën e përshkruan brinja BC gjatë rrotullimit për rreth boshtit d.

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Vëllimi i sektorit sferik

Mësimdhënësi përkufizon sektorin sferik:

***Sektor sferik** quhet trupi i cili formohet me rrotullimin e një sektori rrethor rreth një diametri që nuk e ndërprenë atë, fig.7.24.*

***Teorema 8.** Vëllimi i sektorit sferik është i barabartë me prodhimin e syprinës së zonës sferike përkatëse me një të tretën e rrezes së sferës.*

Vërtetimi. Le të jetë OCD një sektor rrethor nga një rreth i madh i sferës.Nëse sektorin rrethor OCD e rrotullojmë rreth diametrit AB marrim sektorin sferik, fig. 7.24.
Në harkun CD brendashkruajmë një vijë të rregullt poligonale $CC_1C_2 \dots D$. Duke bashkuar kulmete kësaj vije poligonale me qendrën e rrethit, formojmë trekëndësha barakrahës kongruent me apotemë OO_n. Duke rrotulluar sektorin poligonal $OCC_1C_2 \dots D$ rreth diametrit ABformohet një trup vëllimi $V_n$që është sa prodhimi i syprinës që e përshkruan vija poligonale me një të tretën e gjatësisë së apotemës OO_n, (shih teoremën nga pika 15).

Nëse numri i brinjëve të vijës

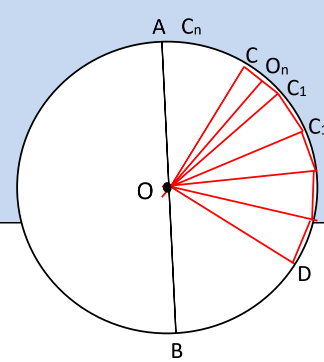


Fig. 7.24

poligonale dyfishohet pafundësisht shumë herë, syprina që përshkruan vija poligonale tenton te syprina a sektorit sferik, ndërsa apotema OO_n tenton në rrezen R të sferës. Prandaj,

$$V = S \cdot \frac{1}{3}R.$$

Duke zëvendësuar$S = 2\pi RH$ marrim

$$V = S \cdot \frac{1}{3}R = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Pra

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

Vërejtje. Teorema e posa vërtetuar është e saktë edhe në rastin kur diametri i rrethit rreth të cilit rrotullohet sektori përmban njërin nga krahët(rrezet) e sektorit rrethor.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit i kanë përvetësuar teoremën për njehsimin e vëllimit të trupave rrotullues dhe njehsojnë vëllimin e sektorit sferik.

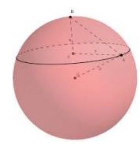
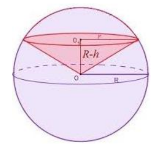
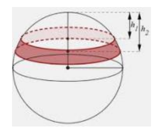
Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

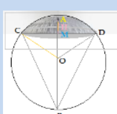
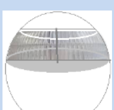
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **3. SFERËS**
Njësitë mësimore: 3.8. Vëllimi i sferës
3.9. Vëllimi i segmentit sferik
3.10. Vëllimi i shtresës sferike

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Forma, hapësira, matjet dhe gjeometria</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 3. SFERA
  </td><td colspan="3"><u>Rezultati i të nxënit të temës:</u>
Nxënësi do të jetë në gjendje të:
1. Identifikon trupat rrotullues dhe pjesët përbërëse të tyre;
2. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e cilindrit dhe konit;
3. Përdorë formulat për të njehsuar syprinën e sipërfaqes dhe vëllimin e sferës;</td></tr>
<tr><td>Njësitë mësimore:
3.8. Vëllimi i sferës
3.9. Vëllimi i segmentit sferik
3.10. Vëllimi i shtresës sferike</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Njehson vëllimin e sferës;
2. Njehson vëllimin e segmentit sferik;
3. Njehson vëllimin e shtresës sferike.</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin e trupave tredimensionalë;
2. Zbaton arsyetimin algjebrik për njehsimin e syprinës së sipërfaqes dhe vëllimit të trupave tre</td></tr>
</table>

dimensional;
3. Zgjidhë problem praktike të ndërlidhura me trupat tre dimesional;

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për të njehsuar vëllimin e sferës, segmentit sferik dhe shtesës sferike si dhe të zbatoi në situata reale.

Fjalët kyçe: Vëllim i sferës, vëllim i segmentit sferik, vëllim i shtresës sferike.

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të njehsoni vëllimin e sferës;
2. Të njehsoni vëllimin e segmentit sferik;
3. Të njehsoni vëllimin e shtresës sferike.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore e në veçanti fizikës dhe shkencave teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të njehsoi.

Mësimdhënësi:
Shtron pyetje. P.sh.
1. Çka quhet sferë;
2. Si është formula e syprinës së sferës;
3. Çka quhet segment sferik;
4. Si është formula e syprinës së segmentit sferik;
5. Si është formula e syprinës së segmentit sferik;
6. Si është formula e syprinës së shtresës sferike;

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Vëllimi i sferës

Mësimdhënësi përkufizon:

Teorema 9. *Vëllimi sferës është i barabartë me prodhimin e syprinës me* $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ *një të tretën e rrezes së saj.*

Vërtetimi. Sfera mund të konsiderohet si trup rrotullues që merret me rrotullimin e një sektori sferik të ndërtuar nga një gjysmë rrethi. Rrjedhimisht, në se me S shënojmë syprinën e sferës me rreze R atëherë kemi

$$V=S\cdot\frac{1}{3}R$$

Më parë mësuam se syprina e sferës njehsohet me formulën $S=4\pi R^2$, prandaj, duke e zëvendësuar në formulën për vëllimin e sferës, marrim

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Rrjedhim. Raporti ndërmjet vëllimeve të dy sferave është i barabartë me raportin e kubeve të rrezeve të tyre

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Vëllimi i segmentit sferik

Mësimdhënësi përkufizon:

Segment sferik *quhet trupi i kufizuar nga një kësulë sferike dhe rrafshi që përmban bazën e saj.*

Teorema 10. *Vëllimi i segmentit sferik njehsohet me formulën*

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right)$$

ku H është lartësia e segmentit kurse R është rrezja e sferës.

Vërtetimi. Vëllimi segmentit sferik është i barabartë me ndryshimin e vëllimit të sektorit sferik me vëllimin e konit që ka kumin në qendrën e sferës, ndërsa bazën e ka bazën e segmentit sferik, fig.7.25.

Pra,

$$V=V_1-V_2, \qquad (1)$$

Ku

$$V_1=\frac{2}{3}\pi R^2 H$$

është vëllimi i sektorit sferik, kurse

$$V_2=\frac{1}{3}d(O,M)\cdot\pi\cdot d(M,D)^2$$

është vëllimi i konit.

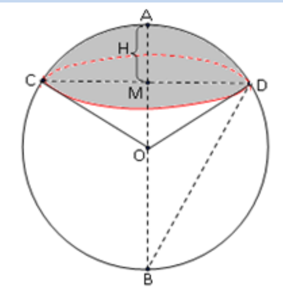


Fig.7.25

Nga ngjashmëria e trekëndëshave AMD dhe DMB rrejdh raporti i brinjëve të tyre

$$d(A,M):d(M,D)=d(M,D):d(M,B),$$

prej nga marrim

$$[d(M,D)]^2=d(A,M)\cdot d(M,D).$$

Kështu formula për V_2 mund të shkruhet

$$V_2=\frac{1}{3}\,\pi\, d(O,M)\cdot d(A,M)\cdot d(M,B). \qquad (2)$$

Nga ana tjetër

$$d(O,M)=R-H, d(A,M)=H \text{dhe} d(M,B)=2R-H.$$

Barazimet e fundit i zëvendësojmë në (2) dhe marrim

$$V_2=\frac{1}{3}\,\pi\, H(R-H)(2R-H).$$

ose

$$V_2=\frac{1}{3}\,\pi\, H(2R^2-3RH+H^2H).$$

Shprehjet për V_1 dhe V_2 i zëvendësojmë në barazimin (1) dhe marrim

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{1}{3}H\right)$$

që duhej vërtetuar.

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

Vëllimi i shtresës sferike

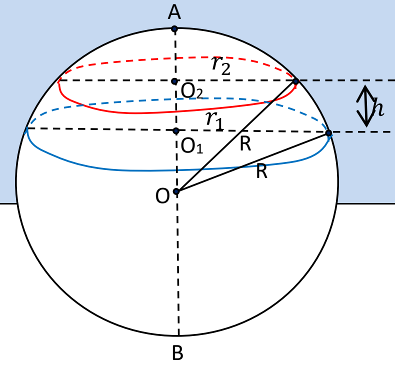
Mësimdhënësi përkufizon:

Shtresë sferike *quhet pjesa e sferës që ndodhet ndërmjet dy rrafsheve paralele prerëse të saj.*

Rrathët prerës quhen **bazat**, ndërsa distanca në mes tyre quhet **lartësia e shtresës**.

Nga figura 7.26 shihet qartë se vëllimi i shtresës sferike është i barabartë me ndryshimin e vëllimeve të dy segmenteve sferik, njërit me qendër të bazës në pikën O_1 e me rreze të bazës r_1 dhe tjetrit me qendër të bazës në piëkn O_2 e me rreze të bazës r_2.

Nëse me H_1 dhe H_2 shënojmë lartësitë s këtyre segmenteve sferik, atëherë vëllimi i shtresës sferike është



$$V=\pi H_1^2\left(R-\frac{1}{3}H_1\right)-\pi H_2^2\left(R-\frac{1}{3}H_2\right),$$

ku $H_1-H_2=h$ është lartësia e shtresës sferike. Duke rregulluar këtë shprehje, pasi që të kemi shprehur rrezen R të sferësme rrezet e segmenteve sferike, r_1 dhe $r_2$marrim formulën përfundimtare për njehsimin e vëllimit të shtresës sferike

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$

Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon vet shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu *bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.*

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit i kanë përvetësuar vëllimin e sferës dhe pjesëve të saj duke shfrytëzuar format dhe pjesët e tyre, po ashtu figurat janë pjesë ndihmëse për të përvetësuar këtë.

Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

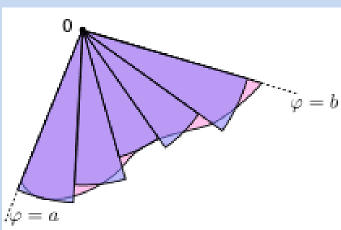
Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por të ketë një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

KAPITULLI **8. NUMRAT KOMPLEKS**

Tema: **8. FORMA TRIGONOMETRIKE E NUMRAVE KOMPLEKS**

Njësia mësimore: 8.1. Sistemi kordinativ polar

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Numri, algoritmet dhe algjebra</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: **8. NUMRAT KOMPLEKS**

</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Paraqet numrin kompleks në rrafshin kompleks;
2. Përcakton modulin dhe argumentin e numrit kompleks;
3. Kryen veprimet me numra kompleks në formë algjebrike (shumëzimi, fuqizimi, pjesëtimi dhe rrënjëzimi);
4. Zbaton formulën e Muavrit;
5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes numrave kompleks në formë algjebrike;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
8.1. Sistemi kordinativ polar</td><td colspan="3">**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:**
1. Përkufizon sistemin koordinativ polar dhe paraqet grafikisht</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:**
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon arsyetimin algjebrik për zgjerimin e konceptit nga numri real në numrin kompleks;
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe shprehë numrin kompleks nga trajta algjebrike dhe trigonometrike;
3. Përdorë simbole algjebrike për të modeluar marrëdhënie dhe situata matematike;
4. Demonstron shkathtësi për veprimet, zbaton parimet dhe procedurat e veprimeve me numra kompleks në situata numerike, algjebrike;
5. Zhvillon kuptimin e fuqisë dhe rrënjës së numrit kompleks me eksponent numër i plotë dhe i zbaton në situata konkrete;
6. Përdorë terminologjinë matematikore dhe komunikon të arsyetuarit për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme duke lidhë konceptet (modul, argument, trajtë algjebrike) në mënyrë që të zgjidhë probleme të ndryshme;</td></tr>
<tr><td colspan="4">**Qasja e të nxënit:**
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për sistemin koordinativ polar.</td></tr>
</table>

Fjalët kyçe: sistem, polar

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni sistemin koordinativ polar dhe paraqet grafikisht

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi sistemin polar të paraqes grafikisht dhe të lidh me sistemin koordinativ kënddrejtë.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet sistem koordinativ kënddrejtë?
2. Të paraqitet në tabelë?
3. Të paraqitet në tabelë një kënd, ku të shënohet kulmi, këndi dhe një pikë në krahun e dytë?
4. Si bëhet orientimi pozitiv?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

1. Sistemi koordinativ polar

Mësimdhënësi:Përkufizimi i kordinatave polare të ndonjë pike P formulohet nga paraqitja e drejtpërdrejti e sistemit koordinativ kënddrejtë.

Le të jetë Ox gjysmëdrejtëz në rrafshin π. Pozita e cilësdo pikë P në rrafshin π është plotësisht e caktuar në qoftë se dihet:

$a)$ Distanca r e pikës P prej origjinës O.

$b)$ Këndi φ $(0 \le \varphi \le 2\pi)$ të cilin e formon gjysmëdrejtëza $[OP)$ me Ox. Çifti (r, φ) i shoqërohet pikës P.

Madhësitë r dhe φ quhen *koordinata polare* të pikës P dhe shënohet $P(r, \varphi)$. Sipas përkufizimit $r \geq 0$, dhe se koordinata e dytë φ nuk është e caktuar njëvlerësish, sepse të njëjtën pikë e caktojnë φ dhe $\varphi + 2k\pi$, $(k \in Z)$. Pika O quhet *pol*, ndërsa gjysmëdrejtëza Ox, quhet *bosht polar*. Poli paraqet një pikë të veçantë, sepse kur $r = 0$ këndi φ është i papërcaktuar.

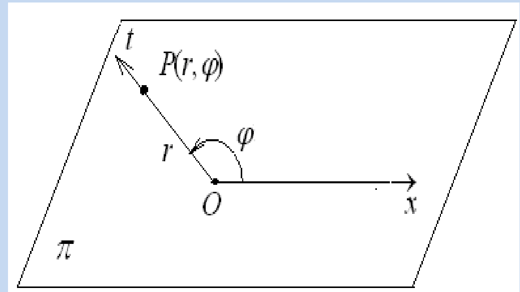


Fig.8.1

Tani po e vendosim lidhjen ndërmjet koordinatave kënddrejta dhe koordinatave polare, ashtu që boshti polar të përputhet me pjesën pozitive të boshtit Ox. Atëherë nëse dihen r dhe φ, do të kemi:

$$x = r\cos\varphi \;\wedge\; y = r\sin\varphi$$

Anasjelltas, nëse dihen koordinatat x dhe y, nga formulat e mësipërme rrjedhin formulat:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}, \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

ku $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, fig.5.1.

Shembull 1. Të paraqiten gjeometrikisht pikat e dhënë me koordinata polare:

a. $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$; **b.** $B(3, 300^0)$.

Zgjidhja:

Zgjidhja. Zgjidhja në formë gjeometrike Fig.8.2 dhe Fig.8.3.

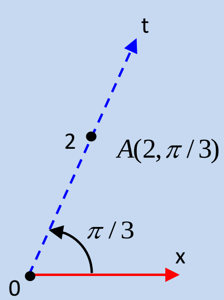


Fig. 8.2

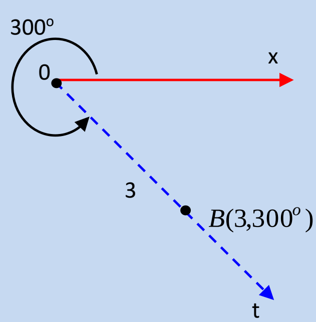


Fig.8.3

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të

nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se përveç sistemit kënddrejtë ekziston edhe sistemi polar dhe se si duke forma grafike e sistemit polarë, njëkohësisht kalimi nga sistemi kënddrejtë në atë polar. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

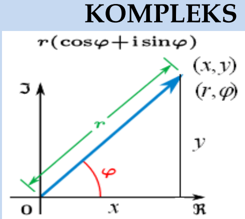
- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **8. NUMRAT** KOMPLEKS

Njësia mësimore: 8.2. Trajta trigonometrike e numrave kompleksë

PLANIT I ORËS MËSIMORE

Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Numri, algoritmet dhe algjebra**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **8. NUMRAT KOMPLEKS** 	Nxënësi: 1. Paraqet numrin kompleks në rrafshin kompleks; 2. Përcakton modulin dhe argumentin e numrit kompleks; 3. Kryen veprimet me numra kompleks në formë algjebrike (shumëzimi, fuqizimi, pjesëtimi dhe rrënjëzimi); 4. Zbaton formulën e Muavrit; 5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes numrave		

	kompleks në formë algjebrike;
Njësia mësimore: 8.2. Trajta trigonometrike e numrave kompleksë	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Paraqet trajtën trigonometrike të numrave kompleks

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon arsyetimin algjebrik për zgjerimin e konceptit nga numri real në numrin kompleks;
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe shprehë numrin kompleks nga trajta algjebrike dhe trigonometrike;
3. Përdorë simbole algjebrike për të modeluar marrëdhënie dhe situata matematike;
4. Demonstron shkathtësi për veprimet, zbaton parimet dhe procedurat e veprimeve me numra kompleks në situata numerike, algjebrike;
5. Zhvillon kuptimin e fuqisë dhe rrënjës së numrit kompleks me eksponent numër i plotë dhe i zbaton në situata konkrete;
6. Përdorë terminologjinë matematikore dhe komunikon të arsyetuarit për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme duke lidhë konceptet (modul, argument, trajtë algjebrike) në mënyrë që të zgjidhë probleme të ndryshme;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për trajtën trigonometrike në numrave kompleks.

Fjalët kyçe: numrat kompleks, forma trigonometrike

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

2. Të paraqet trajtën trigonometrike të numrave kompleks

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të araqes numrin kompleks në formë trigonometrike.

Shtron disa pyetje. P.sh.

2. Si është forma algjebrike e numrit kompleks?
3. Të shënohet në tabelë forma e përgjithshme e numrave kompleks?
4. Të shënohen funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus? Etj.

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. *Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)*

Mësimdhënësi: Fillimisht përkufizon

Numri kompleks i trajtës:

$$z = x + iy \qquad (1)$$

quhet *trajta* (ose *forma, standarde*) *algjebrike* e numri kompleks. Me këtë trajtë jeni njohur më parë. Numri kompleks mund të jepet edhe në trajta të tjera, të cilat ndihmojmë që plotësisht të kryhen veprimet me numra kompleksë, në trajtë më të përshtatshme. Nëse në trajtën algjebrike të numrit kompleks zëvendësohen vlera reale dhe vlera imagjinare me anë të funksioneve trigonometrike : $x = r\cos\varphi$ dhe $y = r\sin\varphi$, fitohet:

$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi \quad \text{ose:} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,. \qquad (2)$$

Mësimdhënësi: **2. *Përkufizimi i trajtës trigonometrike***

Numri i trajtës $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *quhet* ***trajtë trigonometrike*** *(ose* ***këndore****) e numrit kompleksë , ku* r *quhet* ***modul****, ndërsa* φ ***argument*** *i atij numri,* fig. 8.5.

Formula (2) shkurtimisht shëno-het: $z = rcis\varphi$.

Në bazë të përkufizimit të funksioneve trigonometrike nga fig.8.5 kemi:

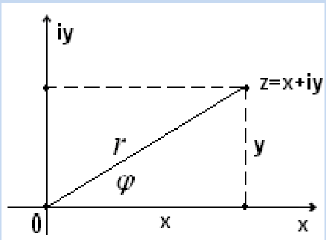


Fig.8.4

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r\cdot\cos\varphi$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r\cdot\sin\varphi$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \quad \text{dhe} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Në katër relacionet e fundit argumenti φ nuk është plotësisht i caktuar. Prandaj, nëse shënojmë me φ_0 vlerën kryesore të argumentit nga relacionet e mësipërme, vlerat e tjera të mbetura janë $\varphi_0 + 2k\pi$, ku $(k \in Z)$.

Nëse në trajtën (2) është $r = 1$, atëherë:

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

i quhet *njësi imagjinare*, ku $i = \sqrt{-1}$.

Numri kompleks i konjuguar i numrit $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ është numri:

$$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \quad \text{ose:} \quad \bar{z} = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

d.m.th, modulet i kanë të barabarta, ndërsa argumentet e kundërta.

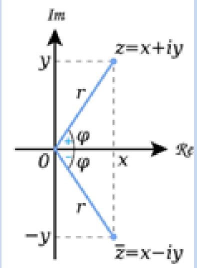


Fig.8.5.

Numrave kompleksë z dhe $\bar{z}$ i'u përgjigjen pikat P dhe P', simetrike ndaj boshtit Ox, fig.8.5.

Dy numra kompleksë të dhënë në trajtë trigonometrike $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ dhe $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ janë *të barabartë*, kur i kanë modulet dhe argumentet e barabarta, d.m.th.:

$$z_1 = z_2 \iff (r_1 = r_2 \wedge \varphi_1 = \varphi_2).$$

Shembulli 2. Është dhënë numri kompleks në trajtën trigonometrike:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Të gjenden moduli, argumenti dhe të paraqitet gjeometrikisht.

Zgjidhja. Duke e krahasuar formulën:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

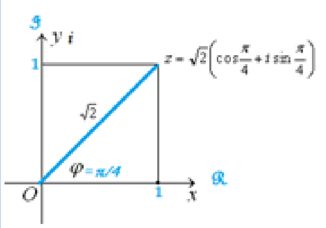


Fig.8.6.

dhe numrin e dhënë: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, shihet se $r = \sqrt{2}$, kurse $\varphi = \frac{\pi}{4}$, fig.8.6.

Shembulli 3. Nëse pika $P(2,\ 2\sqrt{3})$ paraqet numër kompleks, koordinatat e saj shndërroi në trajtë trigonometrike.

Zgjidhja. Meqë $x = 2$ dhe $y = 2\sqrt{3}$, atëherë: $r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} \Rightarrow r = \sqrt{4+12} \Rightarrow r = 4$.

Dhe meqë $\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan\varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$. Pra: $P\left(4\cos\frac{\pi}{3},\ 4\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se një numër kompleks mund ta shndërroi nga forma algjebrike në formë trigonometrike dhe anasjelltas. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

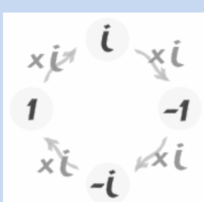
- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 8. NUMRAT KOMPLEKS

Njësia mësimore: 8.3. Veprimet me numra kompleksë

Mbledhja, zbritja, shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave kompleksë në trajtën trigonometrike

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Numri, algoritmet dhe algjebra</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 8. NUMRAT KOMPLEKS
</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Paraqet numrin kompleks në rrafshin kompleks;
2. Përcakton modulin dhe argumentin e numrit kompleks;
3. Kryen veprimet me numra kompleks në formë algjebrike (shumëzimi, fuqizimi, pjesëtimi dhe rrënjëzimi);
4. Zbaton formulën e Muavrit;
5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes numrave kompleks në formë algjebrike;</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 8.3. Veprimet me numra kompleksë- Mbledhja, zbritja, shumëzimi dhe pjesëtimi i numrave kompleksë në trajtën trigonometrike</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Kryen veprimet me numra kompleks</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë</td></tr>
</table>

Numrat kompleks

Nxënësi:

1. Zhvillon arsyetimin algjebrik për zgjerimin e konceptit nga numri real në numrin kompleks;
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe shprehë numrin kompleks nga trajta algjebrike dhe trigonometrike;
3. Përdorë simbole algjebrike për të modeluar marrëdhënie dhe situata matematike;
4. Demonstron shkathtësi për veprimet, zbaton parimet dhe procedurat e veprimeve me numra kompleks në situata numerike, algjebrike;
5. Zhvillon kuptimin e fuqisë dhe rrënjës së numrit kompleks me eksponent numër i plotë dhe i zbaton në situata konkrete;
6. Përdorë terminologjinë matematikore dhe komunikon të arsyetuarit për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme duke lidhë konceptet (modul, argument, trajtë algjebrike) në mënyrë që të zgjidhë probleme të ndryshme;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për veprimet me numra kompleks.

Fjalët kyçe: numrat kompleks trajta trigonometrike, veprimet me numra kompleks, mbledhje, zbritje, shumzim, pjestim

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të kryen veprimet me numra kompleks në formë trigonometrike (mbledhjen, zbritjen, shumzimin)

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të kryej veprimet me numra kompleks.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Si bëhet veprimi me numra kompleks në formën algjebrike (mbledhja, zbritja, shumzimi dhe pjestimi)?
2. Të shënohet në tabelë forma algjebrike e numrit kompleks?
3. Të shënohet në tabelë forma trigonometrike e numrit kompleks?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi, përkufizon veprimet me numra kompleks të trajtës trigonometrike:

Mësimdhënësi shënon në tabelë: ***Mbledhja e numrave kompleksë në trajtë trigonometrike***

Mësimdhënësi: *Bëhet duke mbledhur pjesën reale me pjesën reale dhe pjesën imagjinare me pjesën imagjinare të tyre.*

Pra, për numrat kompleksë të dhënë:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{dhe} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

shuma e tyre është:

$$\begin{aligned} z = z_1 + z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) + r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= \left(r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2\right) + i\left(r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2\right). \end{aligned}$$

1. **Zbritja e numrave kompleksë në trajtën trigonometrike**

Bëhet duke zbritur përkatësisht pjesën reale me pjesën reale dhe pjesën imagjinare me pjesën imagjinare të tyre.

Pra, le të jenë dhënë numrat kompleksë:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \text{ dhe } z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Ndryshimi (diferenca) i tyre është:

$$\begin{aligned} z = z_1 - z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) - r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= \left(r_1\cos\varphi_1 - r_2\cos\varphi_2\right) + i\left(r_1\sin\varphi_1 - r_2\sin\varphi_2\right). \end{aligned}$$

Shembull 4. Janë dhënë numrat kompleksë: $z_1 = \cos 75^0 + i\sin 75^0$ dhe $z_2 = \cos 15^0 + i\sin 15^0$.

Të gjendet:

a. shuma dhe

b. ndryshimi i tyre.

Zgjidhja.

a.
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= \cos 75^0 + i\sin 75^0 + \cos 15^0 + i\sin 15^0 \\ &= \left(\cos 75^0 + \cos 15^0\right) + i\left(\sin 15^0 + \sin 15^0\right) \\ &= 2\cos\frac{75^0 + 15^0}{2}\cdot\cos\frac{75^0 - 15^0}{2} + 2i\sin\frac{75^0 + 15^0}{2}\cdot\cos\frac{75^0 - 15^0}{2} \\ &= 2\cos 45^0\cos 30^0 + 2i\sin 45^0\cdot\cos 30^0 \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + 2i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i.$$

b. $z_1 - z_2 = \cos 75^0 + i\sin 75^0$ - $(\cos 15^0 - i\sin 15^0)$

$$=\left(\cos 75^0 - \cos 15^0\right)+\left(\sin 75^0 - \sin 15^0\right) i$$

$$=-2\sin\frac{75^0+15^0}{2}\cdot\sin\frac{75^0-15^0}{2}+2i\cos\frac{75^0+15^0}{2}\cdot\sin\frac{75^0-15^0}{2}$$

$$=-2\sin 45^0 \sin 30^0 + 2i\cos 45^0 \cdot \sin 30^0$$

$$=-2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}+2i\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{2}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

2. Shumëzimi i numrave kompleksë në trajtën trigonometrike

Prodhimi i numrave kompleksë në trajtën trigonometrike është, po ashtu, numër kompleks i po asaj trajte, moduli i të cilit është i barabartë me prodhimin e moduleve të tyre, ndërsa argumenti i tij është i barabartë me shumën e argumenteve të faktorëve të tyre.

Le të jenë dhënë numrat kompleksë:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{dhe} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Prodhimi i tyre është:

$$z = z_1 \cdot z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)]\cdot[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)]$$

$$= r_1 \cdot r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2]$$

$$= r_1 \cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

3. Pjesëtimi i numrave kompleksë në trajtën trigonometrike

Herësi i numrave kompleksë *në trajtën trigonometrike është po ashtu numër kompleks i po asaj trajte, moduli i të cilit është i barabartë me hersin e moduleve të tyre, kurse argumenti i tij është i barabartë me ndryshimin e argumenteve të pjesëtuesit dhe të pjesëtueshmit.*

Le të jenë dhënë numrat kompleksë:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad \text{dhe} \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Herësi i tyre është:

$$z = z_1 : z_2 = [r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)]:[r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)]$$

$$=\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\cdot\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_2\cos\varphi_1)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}.$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\cdot\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\cdot\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right].\qquad (r_2\neq 0).$$

Shembull 5. Janë dhënë numrat kompleksë $z_1=\cos 75^0+i\sin 75^0$ dhe $z_2=\cos 15^0+i\sin 15^0$. Të gjendet:

a. $z_1\cdot z_2$ **b.** $z_1:z_2$.

Zgjidhja.

a. $z=z_1\cdot z_2 \;=1\cdot(\cos 75^0+i\sin 75^0)\cdot 1\cdot(\cos 15^0+i\sin 15^0)$

$=1\cdot 1\cdot\cos(75^0+15^0)+i\cdot\sin(75^0+15^0)$

$=\cos 90^0+i\cdot\sin 90^0=i$.

b. $z=z_1:z_2=1\cdot(\cos 75^0+i\sin 75^0):\;1\cdot(\cos 15^0+i\sin 15^0)$

$=\frac{1}{1}\cdot\cos(75^0-15^0)+i\;\sin(75^0-15^0)$

$=\cos 60^0+i\;\sin 60^0=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur. Në këtë rast mësimdhënësi bashkërisht i zgjedh detyra me nxënësit duke i shënuar në tabelë dhe herë pas here duke shtruar edhe pyetje dhe duke i angazhuar nxënësit që të jenë sa më aktiv.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit i kanë përvetësuar veprimet themelore të numrave kompleks. Në

këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 8. NUMRAT KOMPLEKS

Njësia mësimore: 8.4. Veprimet me numra kompleksë

8.5. Fuqizimi dhe rrënjëzimi i numrave kompleksë në trajtën trigonometrike

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Numri, algoritmet dhe algjebra**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **8. NUMRAT KOMPLEKS**	Nxënësi: 1. Paraqet numrin kompleks në rrafshin kompleks; 2. Përcakton modulin dhe argumentin e numrit kompleks; 3. Kryen veprimet me numra kompleks në formë algjebrike (shumëzimi, fuqizimi, pjesëtimi dhe rrënjëzimi); 4. Zbaton formulën e Muavrit; 5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes numrave kompleks në formë algjebrike;		
Njësia mësimore: 8.4. Veprimet me numra kompleksë 8.5. Fuqizimi dhe rrënjëzimi i numrave kompleksë në trajtën trigonometrike	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Kryen veprimet me numra kompleks		
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi: 1. Zhvillon arsyetimin algjebrik për zgjerimin e konceptit nga numri real në numrin kompleks; 2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe shprehë numrin kompleks nga trajta algjebrike dhe trigonometrike;			

3. Përdorë simbole algjebrike për të modeluar marrëdhënie dhe situata matematike;
4. Demonstron shkathtësi për veprimet, zbaton parimet dhe procedurat e veprimeve me numra kompleks në situata numerike, algjebrike;
5. Zhvillon kuptimin e fuqisë dhe rrënjës së numrit kompleks me eksponent numër i plotë dhe i zbaton në situata konkrete;
6. Përdorë terminologjinë matematikore dhe komunikon të arsyetuarit për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme duke lidhë konceptet (modul, argument, trajtë algjebrike) në mënyrë që të zgjidhë probleme të ndryshme;

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për veprimet me numra kompleks.

Fjalët kyçe: numrat kompleks trajta trigonometrike, veprimet me numra kompleks, fuqizim, rrënjëzim

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të kryen veprimet me numra kompleks në formë trigonometrike (fuqizimi dhe rrënjëzim)

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

c. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të kryej veprimet me numra kompleks.
Shtron disa pyetje. P.sh.
1. Si bëhet veprimi me numra kompleks në formën algjebrike (fuqizim dhe rrënjëzim)?
2. Të shënohet në tabelë forma algjebrike e numrit kompleks?
3. Të shënohet në tabelë forma trigonometrike e numrit kompleks?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

d. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë: **Fuqizimi i numrave kompleksë në trajtë trigonometrike**

Mësimdhënësi, përkufizon veprimet me numra kompleks të trajtës trigonometrike:

Numri kompleks i dhënë në trajtën trigonometrike ***fuqizohet*** *me një numër natyral, kur moduli i tij fuqizohet me atë numër, ndërsa argumenti shumëzohet me atë numër natyral.*

Le të jetë dhënë numri kompleks në trajtën:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Fuqizimi i tij me një numër natyral $n \in N$ bëhet ashtu që moduli i tjj r fuqizohet me n, kurse argumenti shumëzohet me n. Pra:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Barazimi i fundit vlen edhe për çdo numër të plotë n, nëse n zëvendësohet me $-n$, atëherë

$$z^{-n} = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^{-n} = r^{-n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi) = \frac{1}{r^n}(\cos n\varphi - i\sin n\varphi).$$

Rrënjëzimi i numrave kompleksë në trajtë trigonometrike

Rrënja e n ***- të e numrit kompleks*** *z, shënohet* $\sqrt[n]{z}$ *, është numri kompleks* w *, fuqia e* n *e të cilit është e barabartë me numrin* z *. Pra:*

$$\sqrt[n]{z} = w, \text{ ku është } w^n = z.$$

Nëse $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ dhe $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, atëherë

$$[\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \text{ose} \qquad \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Meqë dy numra kompleksë janë të barabartë, kur modulet i kanë të barabarta dhe kur argumentet u ndryshojnë për shumëfishin e plotë të numrit 2π. Prandaj:

$$\rho^n = r.$$

Prej nga $\rho = \sqrt[n]{r}$ dhe

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \quad \text{prej nga } \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \ (k \in Z).$$

Rrjedhimisht,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ (k \in Z).$$

Nga kjo formulë shihet qartë se rrënja e një numri kompleks z ka n vlera të ndryshme, që ka aq numra të ndryshëm kompleks w_i sa është vlera e n – së, të cilët në mes tyre dallojnë vetëm nga vlera e argumenteve, por që argumentet e tyre formojnë varg aritmetik, ku $\frac{\varphi}{n}$ është termi i parë i vargut dhe diferencë $\frac{2\pi}{n}$. Prandaj, konkludojmë se fytyrat e atyre numrave kompleksë w_i në rrafshin koordinativ formojnë kulmet e n – këndëshit të rregullt të brendashkruar në rrethin me rreze $\sqrt[n]{r}$.

Shembull 6. Të njehsohet $(1+i)^7$.

Zgjidhja. Numri kompleks i dhënë $z=1+i$, fillimisht duhet të shndërrohet në trajtën trigonometrike $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Pra:

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}, \quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}>0 \quad \wedge \quad \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}>0.$$

Meqë kosinusi dhe sinusi janë njëkohësisht pozitivë, rrjedh se numri kompleks gjendet në kuadrantin e parë të sistemit koordinativ, pra:

$$\sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi, \quad (k\in Z).$$

Prandaj, numri i dhënë kompleks $z=1+i$, ka trajtën trigonometrike:

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right].$$

Atëherë:

$$(1+i)^7=(\sqrt{2})^7\left[\cos 7\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin 7\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right].$$

Shembulli 7. Të njehsohet $\sqrt[3]{i}$.

Zgjidhja. Numri kompleks $z=i$, së pari duhet të shndërrohet në trajtën trigonometrike. Shihet se $r=1$ dhe $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Duke e zbatuar formulën:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), (k\in Z),$$

kemi:

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right), \ (k\in Z).$$

1) për $k=0$: $z_1=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

2) për $k=1$: $z_2=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

3) për $k=2$: $z_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$.

d. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja. Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur. Në këtë rast mësimdhënësi bashkërisht i zgjedh detyra me nxënësit duke i shënuar në tabelë dhe herë pas here duke shtruar edhe pyetje dhe duke i angazhuar nxënësit që të jenë sa më aktiv.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar fuqizimin dhe rrënjëzimin e numrave kompleks në trajt trigonometrike. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: 8. NUMRAT KOMPLEKS

Njësia mësimore: 8.5. Formula e Muavrit

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Numri, algoritmet dhe algjebra**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **8. NUMRAT KOMPLEKS**	Nxënësi: 1. Paraqet numrin kompleks në rrafshin kompleks; 2. Përcakton modulin dhe argumentin e numrit kompleks; 3. Kryen veprimet me numra kompleks në formë algjebrike (shumëzimi, fuqizimi, pjesëtimi dhe rrënjëzimi); 4. Zbaton formulën e Muavrit; 5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes numrave kompleks në formë algjebrike;
Njësia mësimore: 8.5. Formula e Muavrit	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përvetëson formulën e Muavrit për numra kompleks

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon arsyetimin algjebrik për zgjerimin e konceptit nga numri real në numrin kompleks;
2. Zhvillon arsyetimin algjebrik dhe shprehë numrin kompleks nga trajta algjebrike dhe trigonometrike;
3. Përdorë simbole algjebrike për të modeluar marrëdhënie dhe situata matematike;
4. Demonstron shkathtësi për veprimet, zbaton parimet dhe procedurat e veprimeve me numra kompleks në situata numerike, algjebrike;
5. Zhvillon kuptimin e fuqisë dhe rrënjës së numrit kompleks me eksponent numër i plotë dhe i zbaton në situata konkrete;
6. Përdorë terminologjinë matematikore dhe komunikon të arsyetuarit për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme duke lidhë konceptet (modul, argument, trajtë algjebrike) në mënyrë që të zgjidhë probleme të ndryshme;

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për veprimet me numra kompleks.

Fjalët kyçe: Formula e Muavrit

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

2. Të përvetëson formulën e Muavrit për numra kompleks

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit ta përvetësojnë formulën e Muavrit.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Si bëhet fuqizimi i numrave komplek në trajtën trigonometrike?
2. Të shënohet në tabelë fuqizimi i numrit kompleks në trajtën trigonometrike?

Sigurisht që nxënësi duhet të shënoi: $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësia mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigje si me gojë ashtu edhe duke i argumentuar në tabelë.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë: **Formula e Muavrit**

Mësimdhënësi, përsërit edh një herë formulën: $[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

Nëse në këtë formulë marrim $r = 1$, atëherë:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Kjo formulë quhet *Formula e Moivre*-it.

Shembulli 8. Duke e zbatuar Formulën e Muavrit vërtetoni se:

a. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \quad \wedge \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$

b. $\left(\sqrt{3} - i\right)^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$

Zgjidhja. **a.** Nisemi nga:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi + i^2\sin^2\varphi$$

$$= (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2i\sin\varphi\cos\varphi.$$

Me zbatim e Formulës së Muavrit shprehja e dhënë është:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Meqë ana e majtë e të dy barazimeve të fundit është e njëjtë, kemi:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \quad \wedge \quad \sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

b. Fillimisht numrin kompleks të dhënë duhet shkruar në trajtën trigonometrike e pastaj të zbatohet Formula e Muavrit. Pra:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$$

$$\cos\varphi=\frac{x}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2}>0 \ \wedge\ \sin\varphi=\frac{y}{r}=-\frac{1}{2}<0$$

$$\sin\varphi=-\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow\varphi_0=-\frac{\pi}{6}$$

$$\sqrt{3}-i=\left[2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$(\sqrt{3}-i)^n=\left[2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^n=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{6}-i\sin\frac{n\pi}{6}\right).$$

Shembulli 9. Të gjenden zgjidhjet e ekuacionit $x^3-1=0$.

Zgjidhja. Kalojmë në trajtë trigonometrike:

$$x^3=1=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi;\ k=0,1,2.$$

Prej këtu kemi:

$$x=\sqrt[3]{\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}.$$

Për $k=0$ zgjidhja e parë është $x_0=\cos 0+i\sin 0=1$. Kjo është zgjidhje reale e ekuacionit të dhënë.

Për $k=1$ zgjidhja e dytë është $x_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Për $k=2$ zgjidhja e tretë është $x_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Këto të dhëna po i paraqesim gjeometrikisht në sistemin koordinativ, ku zgjidhjet paraqesin kulmet e trekëndëshit barabrinjës, fig.5.7.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

$$\theta=\begin{cases}\arctan(\frac{y}{x}) & \text{Nëse } x>0 \text{ dhe } y\geq 0\\ \arctan(\frac{y}{x})+2\pi & \text{Nëse } x>0 \text{ dhe } y<0\\ \arctan(\frac{y}{x})+\pi & \text{Nëse } x<0\\ \frac{\pi}{2} & \text{Nëse } x=0 \text{ dhe } y>0\\ \frac{3\pi}{2} & \text{Nëse } x=0 \text{ dhe } y<0\\ 0 & \text{Nëse } x=0 \text{ dhe } y=0\end{cases}$$

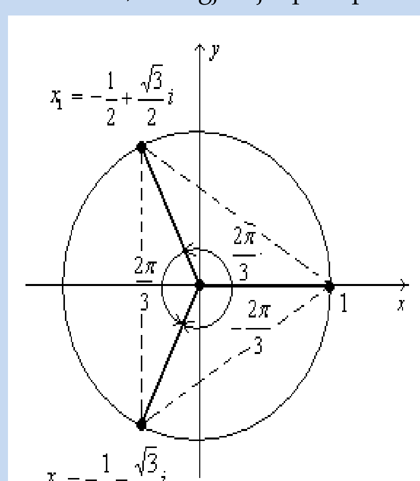


Fig.8.7

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja. Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.
Detyrat dhe puna e pavarur Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur. Në këtë rast mësimdhënësi bashkërisht i zgjedh detyra me nxënësit duke i shënuar në tabelë dhe herë pas here duke shtruar edhe pyetje dhe duke i angazhuar nxënësit që të jenë sa më aktiv.
Reflektimi i orës mësimore: Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit. P.sh. vije në përfundim se nga fuqizimi i numrave kompleks del formula e Muavrit e cila ka një zbatim mjaft të madh në zgjidhjen e ekuacioneve të fuqisë me të lartë. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit. Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin: ▪ Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare. Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por të ketë një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.

KAPITULLI 9. TË DHËNAT DHE PROBABILITETI

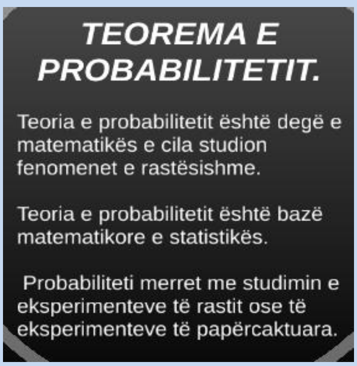
Tema: **9. PROBABILITETI**

Njësia mësimore: 9.1. Hapësira e ngjarjeve elementare

PLANIT I ORËS MËSIMORE

Fusha kurrikulare:	Koncepti bazë i fushës:	Shkalla e kurrikulës:	Klasa:
MATEMATIKË Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	**Të dhënat dhe probabiliteti**	**V-të**	**XI-të**

Tema: **9. PROBABILITETI**



Nxënësi:

1. Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme;
2. Kryen veprimet me ngjarje;
3. Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij;
4. Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të përbërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar/të përbërë;
5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes probabilitetit.

Njësia mësimore: 9.1.
Hapësira e ngjarjeve elementare

Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:

1. Përkufizon probabilitetin;
2. Përkufizon provën;
3. Përkufizon hapësirën e ngjarjeve elementare

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve;
2. Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre;
3. Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve;
4. Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat;
5. Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;
6. Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të teknologjinë.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për hapësirën e ngjarjeve elementare.

Fjalët kyçe: probabilitet, hapësirë, ngjarje, provë

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni probabilitetin;
2. Të përkufizoni provën;
3. Të përkufizoni hapësirën e ngjarjeve elementare.

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi dhe përkufizoi probabilitet si koncept, dhe hapësirën e ngjarjeve elementare si koncepte të probabilitetit.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka paraqet hedhja e një monedhe metalike?
2. Çka paraqet problemi nëse e kemi menduar një numër, bëhet pyetja a është numër i thjesht apo i përbërë ?
3. I kemi dy çelësa, për hapjen e një dere, çka duhet të bëjmë?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigj.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

1. *Hapësira e ngjarjeve elementare*

Mësimdhënësi: shembulli i më sipër 3. na jep me kuptua se duhet ta *provojmë* se cili çelës po e hapë derën dhe veprimi i kryer e hap apo jo derën është një *ngjarje* që po ndodhë.

Dukuria e cila nën kushtet e dhëna mund të ngjajë ose nuk mund të ngjajë, por është e pamundshme edhe njëra edhe tjetra së bashku ose diç e tretë, quhet *ngjarje.*

Përgjithësisht, ngjarja është diçka që nuk është e domosdoshme të ndodhë dhe, nuk është e pamundshme, pra është diçka që mund të ndodhë.

Bëhet pyetje:

Ç'është probabiliteti (*gjasa*)?

Probabilitet (gjasë) quhet mundësia që një ngjarje të ndodhë, e cila mund të ngjajë por nuk është e thënë të ngjajë në momentin e caktuar.

P.sh. Në qoftë se e hedhim monedhën dhe pyesim se a do të bjerë "fytyra", përgjigjja korrekte do të ishte; "ndoshta do të bjerë fytyra".

P.sh. Në një shportë (kuti) gjenden 7 sfera (rruzuj) të kuqe e 15 të bardha me madhësi të njëjtë dhe symbyllazi nxjerrim një sferë. Cila sferë ka gjasa më të mëdha të nxirret? Menjëherë do të themi se sfera e bardhë ka më tepër gjasa të nxirret se sa e kuqja. Mirëpo, apriori nuk mund të pohojmë se do të nxirret sfera e bardhë.

Përkufizimi i provës: ***Prova*** *është çdo veprim plotësisht i precizuar që mund të përsëritet në kushte të pandryshuara disa herë dhe që përfundimi nuk mund të parashihet me siguri.*

Detyrë parësore që parashtrohet është përcaktimi formal i provës dhe ajo përbëhet nga gjetja e të gjitha rezultateve (përfundimeve) të mundshme të saj.

Rezultati (përfundimi) i provës quhet *ngjarje elementare.* Ngjarjet elementare zakonisht shënohen me shkronja të vogla, p.sh. $e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots$. Këto janë ngjarje më të thjeshta, të cilat nuk mund të zbërthehen në ngjarje edhe më të thjeshta.

Përkufizimi i hapësirës së ngjarjeve elementare: ***Hapësirë e ngjarjeve elementare*** *quhet bashkësia e të gjitha rezultateve të mundshme të provës:*

$$E = \{e_1, e_2, \cdots, e_n, \cdots\}.$$

Duke shikuar për nga numri i elementeve, bashkësia E mund të jetë e fundme ose e pafundme.

Prandaj ne do të shqyrtojmë ato prova, të cilat kanë bashkësi të fundme të ngjarjeve elementare.

$$\text{Pra: } E = E_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\},$$

ku n është numër i të gjitha rezultateve të mundshme të provës së dhënë.

Bashkësia e ngjarjeve elementare mund të paraqitet grafikisht me Diagramin e Venit,

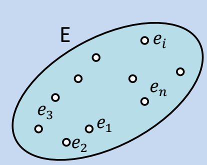


Fig.9.1

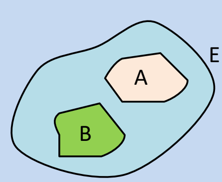


Fig. 9.2

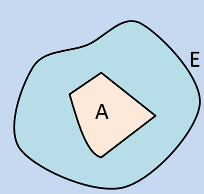


Fig. 9.3

fig. 9.1:

Ngjarjet zakonisht shënohen me shkronja të mëdha $A, B, C, \cdots$. Në qoftë se ngjarjet A, B i takojnë një prove, atëherë mund të paraqiten me diagram, fig.9.2.

Ngjarja e rastit A është nënbashkësi e bashkësisë E të ngjarjeve elementare. Pra, $A \subset E$, fig. 9.3.

Për shembull, nuk mund të parashihet me siguri se në një vend të një rajoni breshri do të shkatërrojë të gjitha të mbjellat. Prandaj, nëse të mbjellat do të shkatërrohen ose jo është ngjarje e rastit. Apo, gjatë luajtjes në lotari fituesi nxirret rastësisht. Edhe kjo është një ngjarje e rastit.

Bazuar në sa u tha më sipër, çdo ngjarje është e lidhur me provën përkatëse dhe përbëhet prej një numri ngjarjesh elementare.

Ngjarja e mundshme (realizueshme) quhet cilado nga ngjarjet elementare të rezultateve të provës së dhënë.

Ngjarja e pamundshme (parealizueshme) quhet ngjarja e cila gjatë kryerjes së provës nuk mund të realizohet. Ngjarja e pamundshme nuk përmban ngjarje elementare, prandaj e shënojmë sikur bashkësinë boshe me $\varnothing$.

Ngjarja e sigurt është ngjarje e cila gjatë kryerjes së provës së dhënë realizohet sigurisht. Ngjarja e sigurt përbëhet nga të gjitha ngjarjet elementare, andaj e barazojmë me bashkësinë E të ngjarjeve elementare.

Shembulli 1. Në qoftë se monedha hidhet një herë, atëherë prova do të jetë hedhja e monedhës. Të shkruhet hapësira e ngjarjeve elementare.

Zgjidhja. Ngjarja elementare janë: ″bie numër“, ″fytyrë“. Hapësira e ngjarjeve elementare E është $E = \{N, F\}$.

Shembulli 2. Faqet e zarit (kubit) të shënuar me numrat nga 1 deri në 6.. Të shkruhet hapësira e ngjarjeve elementare nëse zari hidhet një herë.

Zgjidhja. Prova është hedhja e zarit. Ngjarjet elementare-rezultatet e kësaj prove, janë: $1 =$ ″ra njëshi″, $2 =$ ″ra dyshi″, $\cdots, 6 =$ ″ra gjashtëshi″, ndërsa hapësira E e ngjarjeve elementare është:

$$E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Ngjarja C: „me hedhjen e zarit bie numër më i madh se 6“ është ngjarje e pamundshme, sepse zari ka vetëm 6 faqe. Prandaj, $C = \varnothing$.

Shembulli 3. Le t'i hedhim njëkohësisht dy zare të njëjta, një të bardhë dhe një të zi. Të shkruhet hapësira e ngjarjeve elementare nëse ngjarja është: arë numrat e rënë njëkohësisht.

Zgjidhja. Shënojmë me $e = (i, j)$ ngjarjen: ka rënë numri i në zarin e bardhë, ndërsa ka rënë numri j në zarin e zi.

Hapësira e ngjarjeve elementare E ka këto 36 $(6\cdot 6)$ elemente:

$$E=\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),(1,4),\ (1,5),\ (1,6),(2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5),\ (2,6),$$
$$(3,1),\ (3,2),\ (3,3),\ (3,4),\ (3,5),\ (3,6),(4,1),\ (4,2),\ (4,3),\ (4,4),\ (4,5),\ (4,6),$$
$$(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6),(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}.$$

Ngjarja A: "ka rënë numri 6 në zarin e bardhë" ka këto elemente:

$$A=\{(6,1),\ (6,2),\ (6,3),\ (6,4),\ (6,5),\ (6,6)\}.$$

Ngjarja B: " shuma e numrave të dhënë është më e vogël se 4", ka këto elemente $B=\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1)\}$.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

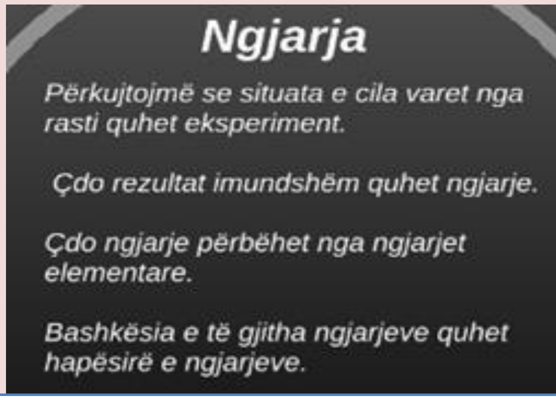
Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar konceptin e probabilitetit. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

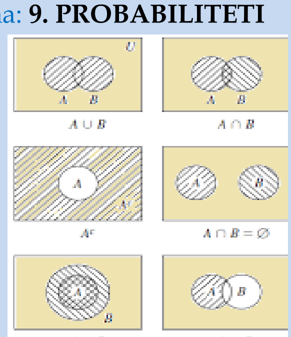
- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.



Tema: **9. PROBABILITETI**

Njësia mësimore: 9.2. Veprimet me ngjarje

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Të dhënat dhe probabiliteti**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **9. PROBABILITETI** 	Nxënësi: 1. Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme; 2. Kryen veprimet me ngjarje; 3. Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij; 4. Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të përbërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar/të përbërë; 5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes probabilitetit.		
Njësia mësimore: 5.2. Veprimet me ngjarje	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon dhe kryen veprimet me ngjarje;		

Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:

Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë

Nxënësi:

1. Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve;
2. Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre;
3. Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve;
4. Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat;
5. Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;
6. Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të teknologjinë.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për hapësirën e ngjarjeve elementare.

Fjalët kyçe: probabilitet, ngjarje, veprime me ngjarje

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni dhe interpretoni veprimet me ngjarje (unionin, prerjen, diferencën dhe komplementin);

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi dhe përkufizoi probabilitet si koncept, dhe hapësirën e ngjarjeve elementare si koncepte të probabilitetit.

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Si e përkufizoni bashkësinë?
2. Si e përkufizoni nënëbashkësinë
2. Çka quhet hapësirë e ngjarje?
2. Çfarë ngjarje kemi?

3. I kemi dy çelësa, për hapjen e një dere, çka duhet të bëjmë?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigj.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

2. Veprimet me ngjarje

Me ngjarje, si nënbashkësi të bashkësisë E, i kryejmë veprimet e bashkësive: union, prerje dhe ndryshim.

Këto veprime i kryejmë vetëm me ato ngjarje, të cilat janë të lidhura me një provë të njëjtë, përkatësisht me ngjarjet që janë nënbashkësi të një bashkësie E të njëjtë të ngjarjeve elementare.

Për ngjarjen A thuhet se *implikon* ngjarjen B, shënojmë $A \subset B$, atëherë dhe vetëm atëherë kur realizimi i ngjarjes A implikon realizimin e asaj B. Relacioni $A \subset B$ nga këndvështrimi i bashkësive do të thotë se A është nënbashkësi e bashkësisë B, fig.9.4.

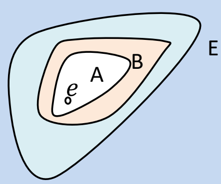


Fig.9.4

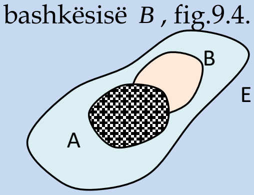


Fig. 9.5

Përkufizimi i unionit të ngjarjeve:

Union *i ngjarjeve A dhe B quhet ngjarja $A \cup B$, e cila realizohet atëherë atëherë kur realizohet të paktën njëra nga ngjarjet A dhe B.*

Pra, ngjarja $A \cup B$ përbëhet prej atyre ngjarjeve elementare, të cilat i takojnë të paktën njërës prej ngjarjeve A e B, fig. 9.5. Dmth:

$$A \cup B = \{e \mid e \in A \ \vee \ e \in B\}.$$

Unioni i ngjarjeve mund të përkufizohet edhe për një çfarëdo numri të fundmë ngjarjesh $A_1, A_2, \cdots, A_n, (n > 2)$. Pra, ngjarja $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ realizohet vetëm atëherë kur realizohet të paktën njëra prej atyre ngjarjeve.

Përkufizimi i prerjes së ngjarjeve:

Prerje *e ngjarjeve A e B, quhet ngjarja $A \cap B$, e cila realizohet atëherë dhe vetëm atëherë kur njëkohësisht realizohen ngjarjet A dhe B.*

Pra, ngjarja $A \cap B$ përbëhet prej atyre ngjarjeve elementare, të cilat i takojnë ngjarjes A dhe ngjarjes B, fig.9.6. Pra:

$$A \cap B = \{e : e \in A \ dhe \ e \in B\}.$$

Përkufizimi i mësipërm i prerjes mund të përgjithësohet për një çfarëdo numri ngjarjesh.

Pra, realizohet ngjarja $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, $(n > 2)$
atëherë dhe vetëm atëherë kur njëkohësisht realizohen të gjitha ngjarjet.

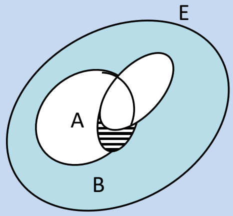


Fig.9.6

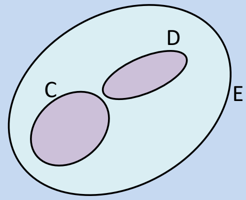


Fig.9.7

Dy ngjarje *A dhe B* quhen *të papajtueshme ose disjunkte* (ose ngjarje që *reciprokisht përjashtohen*), *në qoftë se* realizimi i njërës ngjarje përjashton realizimin e ngjarjes tjetër. Simbolikisht e shënojmë $A \cap B = \varnothing$, fig.9.7.

Ligjet themelore që vlejnë për bashkësitë, vlejnë edhe për ngjarjet kur shikohen si bashkësi:

$$A \cup B = B \cup A; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$

$$A \cap B = B \cap A; \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

$$A \cup A = A \text{ dhe } A \cap A = A.$$

Veprimi union bashkësive ka për element njësi ka ngjarjen e parealizueshme (pamundshme) $\varnothing$, sepse $A \cup \varnothing = A$, ndërsa prerja për element neutral ka ngjarjen e sigurt E, sepse $A \cap E = A$.

Për ngjarjet $A_1, A_2, \cdots, A_n$ thuhet se janë disjunkte, nëse cilado dy nga ato njëkohësisht nuk mund të realizohen:

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

Ngjarjet $A_1, A_2, \cdots, A_n$ formojnë *sistem të plotë ngjarjesh,* kur janë disjunkte dhe kur unioni i tyre është baras me ngjarjen e sigurt E. Pra,

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, \cdots, n) \quad \text{dhe} \quad A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E.$$

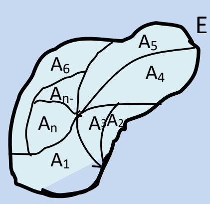


Fig.9.8

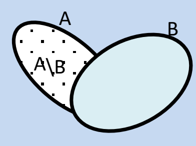


Fig.9. 9

Atëherë ngjarjet $A_1, A_2, \cdots, A_n$ e copëtojnë (dekompozojnë) bashkësinë: E në ngjarje elementare, fig.9.8.

Përkufizimi i ndryshimit të ngjarjeve:

Ndryshimi (diferenca) *i ngjarjeve* A *e* B *quhet ngjarja* $A \setminus B$, *e cila realizohet, atëherë kur realizohet ngjarja* A *dhe nuk realizohet ngjarja* B.

Pra, ngjarja $A \setminus B$ përbëhet prej atyre ngjarjeve elementare, të cilat i takojnë ngjarjes A dhe nuk i takojnë ngjarjes B, fig.9.9. Pra:

$$A \setminus B = \{e \mid e \in A \ dhe \ e \notin B\}.$$

Ngjarja *e kundërt* e ngjarjes A ose ngjarje *komplementare* e ngjarjes A ndaj E është ngjarja $\overline{A}$ ose A^c, e cila realizohet atëherë dhe vetëm atëherë kur nuk realizohet ngjarja A. Pra,

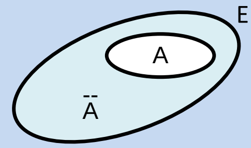


Fig. 9.10

$$\overline{A} = \{e \mid e \in E \ \ dhe \ e \notin A\}.$$

Ngjarja $\overline{A}$ është baras me ndryshimin e ngjarjeve E dhe A. Pra, $\overline{A} = E \setminus A$, fig.9.10.

Shembulli 4. Prova përbëhet nga një hedhje e zarit. Hapësira e ngjarjeve elementare është bashkësia:

$$E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}.$$

Vështrojmë ngjarjet:

A: "ka rënë numri tek";

B: "ka rënë numri çift";

C: "ka rënë numri i përbërë";

D: "ka rënë numri i thjeshtë";

F: "ka rënë numri i pjesëtueshëm me 3".

Të shkruhen këto ngjarje si dhe veprimet me to.

Zgjidhja. Kemi

$$A = \{1,3,5\},\ \ B = \{2,4,6\},\ \ C = \{4,6\},\ \ D = \{2,3,5\},\ \ \ F = \{3,6\}.$$

Këto ngjarje janë nënbashkësi të bashkësisë E, përkatësisht:

$$A \subset E,\ \ B \subset E,\ C \subset E,\ D \subset E,\ F \subset E.$$

Ngjarjet:

$A \cup B = E, \qquad A \cup C = \{1,3,4,5,6\}, \qquad A \cup D = \{1,2,3,5\}$,

$A \cup F = \{1,3,5,6\}, \quad B \cup C = B, \ sepse \ C \subset B$,

$B \cup D = \{2,3,4,5,6\}, \ \ B \cup F = \{2,3,4,6\}$,

$C \cup D = \{2,3,4,5,6\} = B \cup D$.

$C \cup F = \{3,4,6\}$ e $D \cup F = \{2,3,5,6\}$.

$A \cap B = \emptyset$, dmth $A \cap B$ është ngjarje e pamundshme, rrjedhimisht A dhe B janë ngjarjeve disjunkte. Po ashtu, $A \cap C = \emptyset$ dhe $C \cap F = \emptyset$.

$A \cap D = \{3,5\}, \ \ A \cap F = \{3\}, \ \ B \cap C = (4,6\} = C$, sepse $C \subset B$.

$A \setminus D = \{1\}, \quad A \setminus F = \{1,5\}.$

$\overline{A} = \{2,4,6\} = B$, sepse $A \cap B = \varnothing.$

$A \cup B = E,$ sepse $\overline{B} = \{1,3,5\} = A$.

Po ashtu vlen $(\overline{\overline{A}}) = A$, d.m.th. se ngjarja e kundërt e ngjarjes se kundërt është baras me ngjarjen fillestare.

Ngjarjet e kundërta të ngjarjeve C, D e F radhazi janë:

$\overline{C} = \{1,2,3,5\}, \quad \overline{D} = \{1,4,6\}$ dhe $\overline{F} = \{1,2,4,5\}$.

Shembulli 5. Nga shembulli 3 vështrojmë ngjarjet:

A :"shuma e numrave të është 8",

B :"në zarin e zi ka rënë numri 2",

C : "kanë rënë numra shuma e të cilëve është jo më e madhe se pesë".

Të gjenden ngjarjet: $A \cup B, \quad A \cap C, \quad B \cap C, \quad \overline{B}, \quad A \setminus B$.

Zgjidhja. Ngjarjet e kërkuara janë:

$A = \{(6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6)\},$

$B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),$

$C = \{(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4)\}$

ndërsa:

$A \cup B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2),(5,3),(4,4),(3,5),(2,6)$,

$A \cap C = \varnothing$. Pra, ngjarjet A, C janë disjunkte.

$B \cap C = \{(1,2),(2,2),\ (3,2)\}.$

$\overline{B} = \{(1,1),\cdots,(6,1),(1,3),\cdots,(6,3),(1,4),\cdots,(6,4),(1,5),\cdots,(6,5),(1,6),\cdots,(6,6)\}$ $A \setminus B = \{(5,3),(4,4),(3,5),(2,6)\}$.

Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura (punë e pavarur ose në grupe)

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

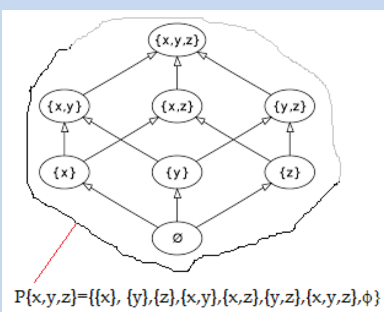
Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në

çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.
P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar veprimet e ngjarjeve. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **9. PROBABILITETI**
Njësia mësimore: 9.3. Bashkësia partitive dhe
9.4. Frekuenca relative e ngjarjeve

<table>
<tr><td colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</td></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Të dhënat dhe probabiliteti</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 9. PROBABILITETI


Bashkësia partitive e bashkësisë $\{x, y, z\}$</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme;
2. Kryen veprimet me ngjarje;
3. Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij;
4. Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të përbërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar/të përbërë;
5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes probabilitetit.</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore:
5.3. Bashkësia partitive dhe
5.4. Frekuenca relative e ngjarjeve</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përkufizon bashkësinë partitive;
2. Përkufizon frekuencën relative të ngjarjeve;</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë</td></tr>
</table>

Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve;
2. Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre;
3. Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve;
4. Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat;
5. Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;
6. Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të teknologjinë.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për hapësirën e ngjarjeve elementare.

Fjalët kyçe: bashkësi partitive, frekuencë relative

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të përkufizoni bashkësinë partitive;
2. Të përkufizoni frekuencën relative të ngjarjeve;

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi dhe përkufizoi probabilitet si koncept, dhe hapësirën e ngjarjeve elementare si koncepte të probabilitetit.

Shtron disa pyetje. P.sh.
1. Çka quhet bashkësi?
2. Çka quhet nënbashkësi?
3. Të gjenden të gjitha nënbashkësitë e bashkësisë së dhënë me tre elemente {x,y,z}
4. Të shënohen dhe paraqiten diagrami në tabele;

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigj.

b. Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

3. Bashkësia partitive e bashkësisë E

Në këtë pikë kuptimin e bashkësisë partitive të një bashkësie të çfarëdoshme e ndërlidhim me bashkësinë partitive të bashkësisë së ngjarjeve elementare.

Supozojmë se hapësira e ngjarjeve elementare E përmban një numër të fundmë elementesh – ngjarjesh. Pra: $E = E_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$.

Siç është theksuar më parë, ngjarjet janë nënbashkësi (pjesë) të bashkësisë E

Pjesët e bashkësisë E, respektivisht nënbashkësitë, mund të jenë një elementësh, d.m.th. ngjarje elementare, e pastaj të gjitha bashkësitë dy elementesh, e të tilla ka sa kombinacione të klasës së dytë prej n elementesh, më tej, të gjitha nënbashkësitë tri elementësh, e të tilla ka sa kombinacione të klasës së tretë prej n elementesh etj., duke përfunduar me kombinacionet e klasës n prej n elementesh, në të vërtetë me vetë bashkësinë E dhe bashkësinë boshe $\varnothing$ (shih Matematikën 10). Kështu fitohet bashkësia partitive e bashkësisë E_n:

$$\mathcal{P}(E_n) = \{A : A \subset E_n\}.$$

Shembulli 6. Janë dhënë bashkësitë e ngjarjeve elementare:

a. një elementesh: $E_1 = \{e_1\}$,

b. dy elementesh: $E_2 = \{e_1, e_2\}$,

c. tri elementesh: $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

Të gjendet bashkësitë partitive dhe numri kardinal i tyre.

Zgjidhja. **a.** Për bashkësinë një elementësh E të ngjarjeve elementare $E_1 = \{e_1\}$ bashkësia partive ose bashkësia e të gjitha nënbashkësive të saj është bashkësia:

$$\mathcal{P}(E_1) = \{\varnothing, \{e_1\}\}.$$

Numri kardinal i bashkësisë partitive $\mathcal{P}(E_1)$ është:

$$card(\mathcal{P}(E_1)) = 2^1 = 2.$$

b. Për bashkësinë dy elementësh E të ngjarjeve elementare $E_2 = \{e_1, e_2\}$ bashkësia partive ose bashkësia e të gjitha nënbashkësive të E është bashkësia:

$$\mathcal{P}(E_2) = \{\varnothing, \{e_1\}, \{e_2\}, (e_1, , e_2\}\}.$$

Numri kardinal i bashkësisë partitive $\mathrm{P}(E_2)$ është:

$$card(\mathrm{P}(E_2)) = 2^2 = 4.$$

c. Për bashkësinë tri elementësh E të ngjarjeve elementare $E_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ bashkësia partive ose bashkësia e të gjitha nënbashkësive të E është bashkësia:

$$\mathcal{P}(E_2) = \{\varnothing, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_1,, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_3\}\}.$$

Numri kardinal i bashkësisë partitive $\mathrm{P}(E_3)$ është:

$$card(\mathcal{P}(E_3)) = 2^3 = 8.$$

Kështu, nuk është vështirë të vërehet mënyra e formimit të bashkësisë partitive $\mathrm{P}(E_n)$ të bashkësisë $E = E_n$ si bashkësi e të gjitha nënbashkësive:

$$\mathcal{P}(E_n) = \{\varnothing, \{e_1\}, \cdots, \{e_n\}, \{e_1, e_2\}, \cdots \{e_{n-1}, e_n\}, (e_1, e_2, e_3\}, \cdots, \{e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\}, \cdots, E_n\}.$$

Numri kardinal i bashkësisë partitive $\mathrm{P}(E_n)$ është:

$$card(\mathcal{P}(E_n)) = 2^n,$$

ku n tregon numrin e elementeve të bashkësisë, përkatësisht numrin e të gjitha rezultateve të provës së dhënë.

Gjithashtu, duhet vërejtur se elementet e bashkësisë partitive $\mathcal{P}(E_n)$ janë të gjitha ngjarjet e mundshme për provën, bashkësia e rezultateve e të cilës është bashkësia E_n. Pra:

$$(A \subset E_n) \Leftrightarrow [A \in P(E_n)], \quad \text{fig.9.11.}$$

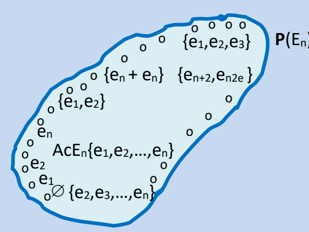


Fig. 9.11

Përkufizimi i hapësirës probabile: Dyshja e renditur $(E_n, \ \mathcal{P}(E_n))$, ku E_n është bashkësia e ngjarjeve elementare e provës së dhënë, ndërsa $\mathcal{P}(E_n)$ bashkësia partitive e bashkësisë E_n, quhet **hapësirë probabile.**

E kjo do të thotë se secilës ngjarje A, e cila është element i bashkësisë partitive $\mathcal{P}(E_n)$, mund t'i shoqërohet numri jonegativ $P(A) \geq 0$, i cili shpreh probabilitetin për realizimin e saj.

Probabiliteti shkruhet si përqindje, thyesë apo numër dhjetor.

Mësimdhënësi shtron përsëri disa pyetje:

Nëse një monedhë metalike hidhet një herë sa mundësi e rënies së saj është?
Nëse hidhet dy herë , sa mundësi të rënies së saj janë? E kështu me radhë.

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

4. Frekuenca relative e ngjarjeve

Nëse monedhën e hedhim 100 herë, e paraqitjen e ”fytyrës” e shënojmë si ngjarje F dhe ajo përsëritët 45 herë, atëherë numri 45 quhet *frekuencë absolute* e ”figurës” F, ndërsa herësi $\frac{45}{100}$ quhet *frekuencë relative* apo *pjesëmarrje relative* e “figurës” F dhe shënohet $f_r(F)=\frac{45}{100}$.

Eksperimente me hedhjen e monedhës në historinë e probabilitetit kanë bërë shumë hulumtues. Gjatë këtyre eksperimenteve, ndër të tjera, është evidentuar numri i paraqitjes së “fytyrës” - frekuenca absolute të ngjarjes F dhe herësi i numrit të paraqitjes së ngjarjes F dhe numrit të përsëritjes së provës, çka paraqet frekuencën relative të ngjarjes F.

Në tabelën e mëposhtme janë dhënë rezultatet e hulumtimeve të tilla.

Provat e bëra	Numri i hedhjeve	Numri i paraqitjes së fytyrës	Frekuenca relative
Bifoni	4040	2048	0.5069
K. Pirsoni	12000	6019	0.5016
K. Pirsoni	24000	12012	0.5005

Tabela 1

Vërejmë se frekuenca relative ndryshon me numrin e përsëritjes së provës. Por, me shtimin e numrit të përsëritjes së provës ndryshimet te frekuenca relative janë të vogla e më të vogla dhe se frekuenca relative stabilizohet rreth një numri karakteristik, karakteristik për ngjarjen F.

Numri karakteristik i përparmë është 0.5, ndërsa devijimet nga frekuenca relative nga ai numër te hedhja e 4040 është 0.007, ndërsa te hedhja e 24000 gjithsej 0.0005, d.m.th. aq e vogël.

Shembulli 7. Në repartin e kontrollit të kualitetit të prodhimit të një fabrike në mënyrë të rastësishme janë marrë 100 artikuj të njëjtë dhe janë konstatuar defekte (gabimi) në 7 prej tyre.

Në ngjarjen A: “paraqitja e artikullit defekt”, frekuenca relative e ngjarjes A është $f_r(A)=\frac{7}{100}$.

Kur kontrollohen 1000 artikuj të tillë, është konstatuar se 58 janë me defekte. Tani frekuenca relative e re e artikujve defekt është $f_r(A)=\frac{58}{1000}$.

Gjatë kontrollit të 10000 artikuj të tillë, është konstatuar se 611 janë me defekte, tani frekuenca relative e re e artikujve defekt është $f_r(A)=\frac{611}{10000}$.

Frekuenca relative e artikujve defekt ndryshon me ndërrimin e numrit të artikujve të kontrolluar, por, edhe nga përvoja, më e pranueshme është ajo vlerë e frekuencës relative, e cila fitohet nga kontrollimi i një numri më të madh artikujsh, sepse është tregues më i besueshëm i kualitetit të prodhimit.

Përgjithësisht, nëse një provë në kushte të pandryshuara përsëritet n herë, ku shënohen ngjarjet përkatëse A dhe konstatohet se në n përsëritje ngjarja A është realizuar k herë, ku $k \le n$, atëherë:

- Numri k quhet *frekuencë absolute* e ngjarjes A në provën e dhënë, e cila shënohet me

$$f_a(A) = k$$

- *Frekuenca relative* e ngjarjes A është herësi i numrit të realizuar i ngjarjes A dhe numrit të përsëritjeve të të provës së bërë

$$f_r(A) = \frac{k}{n}, \quad k \le n$$

Kur n rritet, tani frekuenca relative $f_r(A)$ oscilon rreth një numri karakteristik, i cili numerikisht do të shprehë besueshmërinë e realizimit të ngjarjes A dhe quhet ***probabilitet*** i ngjarjes A dhe shënohet $P(A)$.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar bashkësinë partitive të një bashkësie si një bashkësi me elemente e të gjitha nënbashkësinë të bashkësisë së dhënë. Poashtu nxënësit kanë kuptuar frekuencën relative si numër të ngjarjeve të mundshme. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Prova përsëritet sipas dëshirës shumë herë në kushte të pandryshuara, duke e regjistruar ngjarjen E që na intereson. Në qoftë se bëjmë n herë prova të njëjta dhe në qoftë se gjatë atyre provave ngjarja E ka ndodhur m herë atëherë numri m quhet frekuencë absolute (dendësia), ndërsa herësi m/n quhet frekuencë relative e ngjarjes E.

Tema: **9. PROBABILITETI**

Njësia mësimore: 9.5. Aksiomatikë e probabilitetit

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Të dhënat dhe probabiliteti**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**
Tema: **9. PROBABILITETI**	Nxënësi: 1. Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme; 2. Kryen veprimet me ngjarje; 3. Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij; 4. Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të përbërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar/të përbërë; 5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes probabilitetit.		
Njësia mësimore: 9.5. Aksiomatikë e probabilitetit	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon dhe interpreton aksiomat e probabilitetit;		
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi: 1. Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve; 2. Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre; 3. Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e			

problemeve;

4. Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat;
5. Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;
6. Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të teknologjinë.

Qasja e të nxënit:

Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për aksiomat dhe vetit e probabilitetit.

Fjalët kyçe: aksiomat e probabilitet

Kriteret e suksesit:

Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni dhe interpretoni aksiomat e probabilitetit

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:

Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:

Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve

Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi dhe përkufizoi aksiomat e probabilitetit.

Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet aksiomë?
2. Çka quhet frekuencë relative?
3. Çka quhet frekuencë absolute?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigj.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

5. Aksiomatikë e probabilitetit

Kolmogorovi, në vitin 1933, njehsimin e probabilitetit e shtron në mënyrë aksiomatike dhe e ndërlidh me *teorinë e bashkësive* dhe *teorinë e funksioneve*.

Supozojmë se bashkësia e ngjarjeve elementare $E = E_n$ është e fundme.

Mësimdhënësi përkufizon:

Përkufizimi i probabilitetit:

*Në bashkësia partitive $\mathcal{P}(E_n)$ themi se është përkufizuar funksioni P i **probabilitetit** nëse P plotëson tri aksiomat vijuese:*

1^0 (Pozitiviteti) *Çdo ngjarje A nga bashkësia partitive $\mathcal{P}(E_n)$ i përgjigjet numri jo negativ $P(A)$, i cili quhet **probabilitet** i saj:*

$$\forall A \in \mathcal{P}(E_n), \quad P(A) \geq 0.$$

2^0 (Normimi) *Probabiliteti i ngjarjes së sigurt E_n është baras me 1: $\mathcal{P}(E_n) = 1$.*

3^0 (Aditiviteti) *Për çfarëdo dy ngjarje A dhe B nga bashkësia partitive $\mathcal{P}(E_n)$ probabiliteti i unionit është baras me shumën e probabiliteteve të tyre:*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \ \forall A, B \in \mathrm{P}(E_n), \ A \cap B = \varnothing.$$

Bashkësia partitive $\mathcal{P}(E_n)$ e bashkësisë E_n mund të probabilitizohet, në temë und të përkufizohet funksiononi i probabilitetit P dhe nëse shënojmë:

$$P(e_1) = p_1, \ P(e_2) = p_2, \cdots, P(e_n) = p_n,$$

ku $p_1, \ p_2, \cdots, p_n$ janë numra të çfarëdoshëm jo negativë ($p_i \geq 0$ për $i = 1, 2, \cdots, n$), të cilët plotësojnë kushtin $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$, dhe nëse probabiliteti i çdo ngjarjeje:

$$A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\} \in \mathcal{P}(E_n), \ 0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n, \ 0 \leq k \leq n,$$

e cila është element i bashkësisë partive $\mathcal{P}(E_n)$, caktohet kështu:

$$P(A) = P(\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}) = P(\{e_{i_1})\} \cup P(\{e_{i_2}\}) \cup \cdots \cup P(\{e_{i_k})\} =$$

$$= P(e_{i_1}) + P(e_{i_2}) + \cdots + P(e_{i_1}) = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$$ (bazuar në aksiomën 3^0).

Në të vërtetë, probabiliteti i çdo ngjarjeje A është baras me shumën e probabiliteteve të ngjarjeve elementare nga të cilat formohet ngjarja A.

Pohimi 1. *Nëse A është çfarëdo ngjarje nga $\mathcal{P}(E_n)$, probabiliteti i ngjarjes së kundërt $\overline{A}$ është* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Vërtet, meqë $A \cup \overline{A} = E_n$, kemi $P(A \cup \overline{A}) = P(E_n)$. Në bazë të aksiomave 2 dhe 3 kemi:

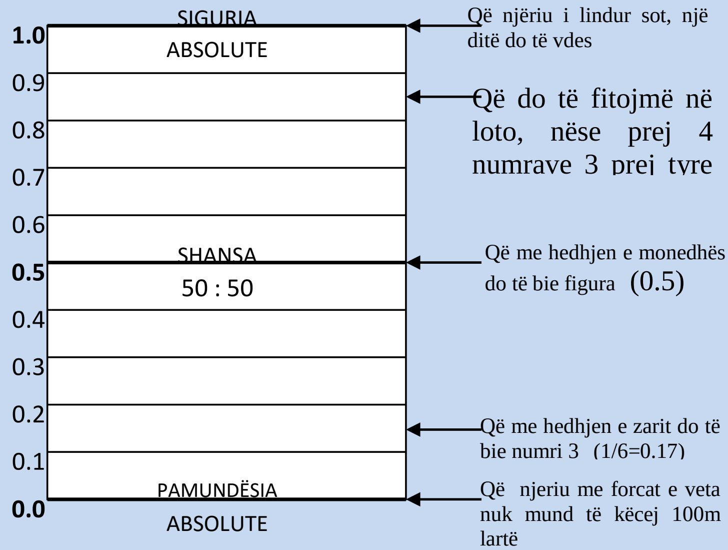
$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Rrjedhimisht, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Si rrjedhim i pohimit 1 del se $P(\varnothing) = 0$, d.m.th. probabiliteti i ngjarjes së pamundshme është baras me zero.

Vërtet, nëse $A = E_n$, atëherë $\overline{A} = \overline{E_n}$, e nga shprehja për probabilitetin e ngjarjes së kundërt rrjedh se

$P(\overline{E_n}) = 1 - P(E_n)$, përkatësisht $P(\varnothing) = 1 - 1 = 0$, d.m.th. $P(\varnothing) = 0$.



Ndërmjet sigurisë absolute ($p=1$) dhe pamundësisë absolute ($p=0$) gjenden të gjitha rastet me probabilitet më të vogël ose më të madh, siç shihet edhe nga skema e mëposhtme.

Pohimi 2. *Nëse A e B janë ngjarje të çfarëdoshme nga $\mathcal{P}(E_n)$ dhe nëse $A\subset B$,(ngjarja A implikon ngjarjen B) , atëherë $P(A)\leq P(B)$.*

Vërtet, Meqë $A\subset B$, kemi

$B=A\cup(\overline{A}\cap B)$, ku ngjarjet A dhe $\overline{A}$ janë përjashtuese ose komplementare.

Tani, në bazë të aksiomën 3, kemi

$$P(B)=P(A)+P(\overline{A}\cap B).$$

Meqë $P(\overline{A}\cap B)\geq 0$ (në bazë aksiomës 1, atëherë $P(B)\geq P(A)$.

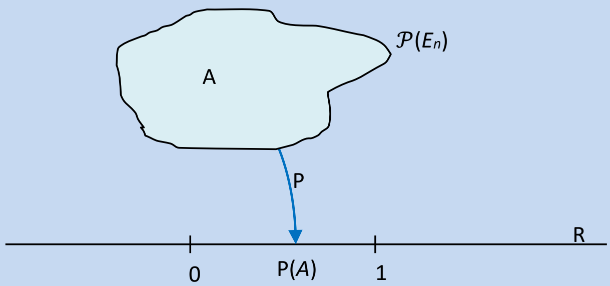
Pohimi 2 tregon se probabiliteti P është funksion monoton.

Duke u bazuar në pohimin e përsipër probabilitetin mund ta konsiderojmë si një funksion me domen $\mathcal{P}(E_n)$ dhe kodomen në segmentin $[0,1]$, argumentet e të cilit është ngjarje nga $\mathcal{P}(E_n)$. Pra,

$$\forall A\in \mathcal{P}(E_n),\ 0\leq P(A)\leq 1.$$

Vërtet, meqë $\varnothing\subset A\subset E_n$, kemi:

$$P(\varnothing) \le P(A) \le P(E_n)\,,$$



përkatësisht $0 \le P(A) \le 1$.

Prandaj, probabiliteti P çdo ngjarje A nga bashkësia partitive $\mathcal{P}(E_n)$ e pasqyron në numrin jo negativ nga segmenti $[0, 1]$, fig. 9.12.

c. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar aksiomat e probabilitetit. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

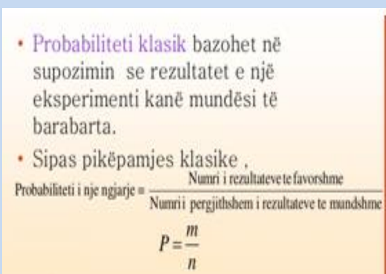
Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një

problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Tema: **9. PROBABILITETI**
Njësia mësimore: 9.6. Përkufizimi klasik i probabilitetit

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Të dhënat dhe probabiliteti</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 9. PROBABILITETI

</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme;
2. Kryen veprimet me ngjarje;
3. Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij;
4. Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të përbërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar/të përbërë;
5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes probabilitetit.</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 9.6.
Përkufizimi klasik i probabilitetit</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përkufizon probabilitetin;</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:
1. Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve;
2. Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre;
3. Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve;
4. Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat;
5. Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;
6. Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të</td></tr>
</table>

teknologjinë.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese, për përkufizimin klasik të probabilitetit.

Fjalët kyçe: përkufizim klasik të probabilitet

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore

1. Të përkufizoni përkufizimin klasik të probabilitetit;

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi dhe përkufizoi përkufizimin klasik të probabilitetit.
Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Të thuhen aksiomat e probabilitetit?
2. Të shënohen në tabelë aksiomat e probabilitetit?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigj.

a. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

6. Përkufizimi klasik i probabilitetit

Le të jetë $E = E_n = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ bashkësi e fundme e ngjarjeve elementare. Supozojmë se probabilitetet e të gjitha ngjarjeve elementare janë të barabarta:

$$P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n) = p, \text{ ku } 0 < p < 1.$$

Meqë $E_n = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_n\}$, bazuar në aksiomat 2 dhe 3, rrjedh se:

$$P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1,$$

ndërsa duke pasur parasysh supozimin $P(e_1) = P(e_2) = \cdots = P(e_n) = p$, kemi:

$$n \cdot p = 1 \quad \text{ose} \quad p = \frac{1}{n}.$$

Prandaj, nëse në një provë të gjitha ngjarjet elementare janë njësoj probabile, atëherë probabiliteti i vetëm i cilësdo ngjarje elementare është baras me vlerën reciproke të numrit të ngjarjeve elementare.

Nëse ngjarja A përmban m ngjarje elementare $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_m}\}$, ku $m \le n$, atëherë ngjarjet elementare $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_m}$ janë raste të volitshme (favorshme) për A, d.m.th. $A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{e_{i_m}\}$.

Kur të gjitha rezultatet e provës janë njësoj probabile, probabiliteti i ngjarjes A është:

$$P(A) = P(e_{i_1}) + P(e_{i_2}) + \cdots + P(e_{i_m}) = m \cdot p,$$

ose duke pasur parasysh se $p = \frac{1}{n}$, rrjedhimisht:

$$\boxed{P(A) = \frac{m}{n}}$$

Barazimi i fundit paraqet përkufizimin klasik të probabilitetit, që me fjalë mund të shprehet:

Përkufizimi klasik i probabilitetit:

Probabiliteti *i ngjarjes A është baras me herësin e numrit të rasteve të volitshme për ngjarjen A dhe të numrit të përgjithshëm të të gjitha rasteve.*

Duhet theksuar se përkufizimi klasik i probabilitetit ka kuptim vetëm nën dy supozime themelore:

kur bashkësia E_n e ngjarjeve elementare është e fundme, dhe
kur ngjarjet elementare nga ajo bashkësi janë njësoj të mundshme.

Shembulli 9. Sa është probabiliteti që me hedhjen e një zari, do të bie:
a. numër çift;
b. numër më i vogël se 5;
c. se nuk do të bjerë numri 4;
d. se do të bjerë numri 8?

Zgjidhja. Bashkësia e ngjarjeve elementare është $E_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$:

a. $A = \{2,4,6\}$, $m = 3$, tani do të jetë $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b. $B = \{1,2,3,4\}$, $m = 4$, tani do të jetë $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

c. $C=\{4\}$, $m=1$, tani $P(C)=\dfrac{1}{6}$, ndërsa $P(\overline{C})=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$.

d. $D=\varnothing$, $m=0$, atëherë $P(\varnothing)=\dfrac{0}{6}=0$.

Shembulli 10. Në një shportë gjenden 5 sfera të bardha, 7 të zeza dhe 8 të kuqe. Me një nxjerrje të rastësishme nxjerrim 4 sfera. Të gjendet probabiliteti që:

A: të gjitha 4 sferat janë të zeza;

B: të gjitha 4 sferat janë të kuqe;

C: të paktën një sferë le të jetë e bardhë.

Zgjidhja. **a**. Na shportë janë gjithsej 20 sfera. Nga 20 sfera në shportë, 4 prej tyre mund të nxjerrim në $\binom{20}{4}$ mënyra. Ndërsa, ngjarje e favorshme është nxjerrja e sferës së zezë. Nga 7 sfera të zeza, 4 nga to mund të nxjerrën në $\binom{7}{4}$ mënyra. Pra, numri i mundësive për realizimin e ngjarjes A është $n=\binom{20}{4}$, ndërsa numri i ngjarjeve të favorshme është $m=\binom{7}{4}$. Prandaj, $P(A)=\dfrac{m}{n}=....=\dfrac{7}{969}$.

b. Për $n=\binom{20}{4}$, $m=\binom{8}{4}$ dhe $P(B)=\dfrac{14}{969}$.

c. Për ngjarjen C ngjarja e kundërt është $\overline{C}$: asnjë sferë nuk është e bardhë”. Atëherë:

$$n=\binom{20}{4},\quad m=\binom{15}{4} \text{ dhe } P(\overline{C})=\frac{91}{323},$$

$$\text{Prandaj, } P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{91}{323}=\frac{232}{323}.$$

Shembulli 11. Ish fabrika e amortizatorëve në Prishtinë i ka dërguar kooperuesit, Pezhosë në Francë 300, amortizatorë, për të cilët garanton që mes tyre më së shumti ka 30 amortizatorë me defekt.

Kontrollori me zgjedhje të rastit merr 4 amortizatorë për kontroll. Nëse supozojmë se në dërgesë gjenden saktësisht 30 amortizatorë me defekte, sa është probabiliteti që me zgjedhjen e marrë të gjenden 3 amortizator defekt?

Zgjidhja. Për zgjidhje të këtij problemi fillimisht duhet llogaritur, se në sa mënyra të ndryshme gjithsej mund të merret zgjedhja prej 4 amortizatorësh, e pastaj në sa mënyra mund të merret zgjedhja në të secilën ka 3 defekt.

Nga bashkësia prej 300 amortizatorësh, 4 sish mund të merren në:

$n=\binom{300}{4}$ - mënyra të ndryshme. Ndërsa, nga 30 amortizatorë me defekte, 3 prej tyre rastësisht mund të merren në $\binom{30}{3}$-mënyra të ndryshme. Gjithsej amortizatorë pa defekte janë 270, një nga ta mund të merret në $\binom{270}{1}$- mënyra.

Rrjedhimisht, 4 amortizatorë, prej të cilëve njëri është me defekte, mund të zgjidhen në në $\binom{270}{1}$ mënyra. Pra, ngjarja e favorshme mund të realizohet në $m=\binom{30}{3}\binom{270}{1}$ mënyra të ndryshme.

Atëherë, probabiliteti i kërkuar është:

$$p=\frac{m}{n}=\frac{\binom{30}{3}\binom{270}{1}}{\binom{300}{4}}=....=0,0033..$$

b. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

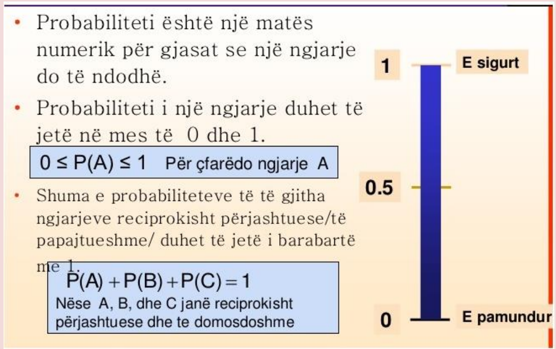
Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

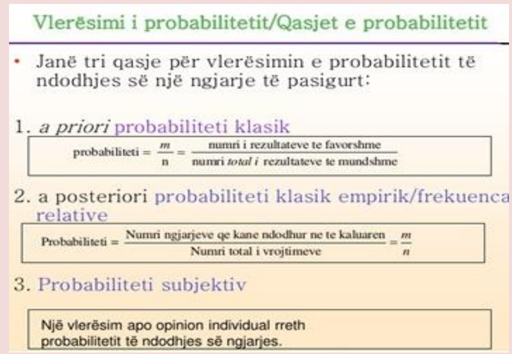
P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar përkufizimin klasik të probabilitetit. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

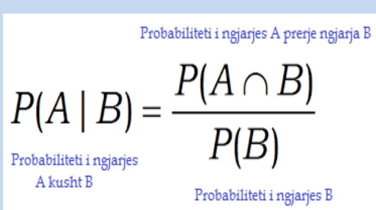
Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.





Tema: **9. PROBABILITETI**

Njësia mësimore: 9.7. Probabiliteti i kushtëzuar

<table>
<tr><th colspan="4">PLANIT I ORËS MËSIMORE</th></tr>
<tr><td>Fusha kurrikulare:
MATEMATIKË
Lënda mësimore:
MATEMATIKË</td><td>Koncepti bazë i fushës:
Të dhënat dhe probabiliteti</td><td>Shkalla e kurrikulës:
V-të</td><td>Klasa:
XI-të</td></tr>
<tr><td>Tema: 9. PROBABILITETI
</td><td colspan="3">Nxënësi:
1. Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme;
2. Kryen veprimet me ngjarje;
3. Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij;
4. Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të përbërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar/të përbërë;
5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes probabilitetit.</td></tr>
<tr><td>Njësia mësimore: 9.7.
Probabiliteti i kushtëzuar</td><td colspan="3"><u>Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:</u>
1. Përkufizon probabilitetin e kushtëzuar</td></tr>
<tr><td colspan="4"><u>Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës:</u>
Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë
Nxënësi:</td></tr>
</table>

1. Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve;
2. Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre;
3. Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve;
4. Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat;
5. Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme;
6. Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të teknologjinë.

Qasja e të nxënit:
Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese për probabilitetin e kushtëzuar.

Fjalët kyçe: Probabiliteti i kushtëzuar

Kriteret e suksesit:
Mësimdhënësi, kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore
1. Të përkufizoni probabilitetin e kushtëzuar;

Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore:
Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.

Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore:
Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.

Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve
Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe
Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës
Organizimi i orës së mësimit:

a. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësoi dhe përkufizoi probabilitetin e kushtëzuar.
Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.
1. Kush po e thotë përkufizimin klasik të probabilitetit?
2. Të shënohet në tabelë formula e përkufizimit klasik të probabilitetit?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigj.

b. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

7. Probabiliteti i kushtëzuar

Mësimdhënësi:

Ngjarja e rastit: *″bie shi ″*, mund të ndikojë në ngjarjen e rastit *″rritet niveli i ujit të lumit″* apo *″rritet numri i fatkeqësive të komunikacionit në rrugë″* dhe ngjashëm.

Andaj, shpesh kërkohet mundësia e ndodhjes së ngjarjes A, me kusht që ngjarja B të jetë realizuar më parë. Ngjarja e tillë shënohet A/B dhe lexohet: ″ A me kushti B ″ dhe quhet *ngjarje e kushtëzuar.*

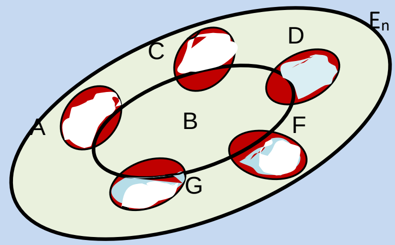


Fig. 9. 13

Në këtë rast nuk i shikojmë ngjarjet $A, C, D, \ldots$ nga bashkësia partitive $\mathcal{P}(E_n)$, por vetëm prerjet e tyre me ngjarjen B, të cilat quhen *transhe* të atyre ngjarjeve në B, fig.9.13.

Përkufizimi i probabilitetit të kushtëzuar:

Probabiliteti i kushtëzuar $P(A/B)$ *i ngjarjes* A ***me kusht*** B *është i barabartë me herësin e probabilitetit të përnjëhershëm të ngjarjeve* A *e* B *dhe probabilitetit të ngjarjes* B.

Pra:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(B)>0.$$

Meqë $A\cap B\subseteq B$, për çdo $B\in\mathcal{P}(E_n)$, atëherë: $P(A\cap B)\le P(B)$, dhe përkufizimit kemi $0\le P(A/B)\le 1$.

Shembulli 12. Në shportë gjenden 5 sfera të bardha dhe 11 të zeza. Rastësisht nxirret një sferë, shënohet ngjyra e saj dhe nuk kthehet më në shportë. Pastaj nxirret sfera tjetër. Caktoni probabilitetin që herën e parë është nxjerrë sfera e bardhë, ndërsa në të dytën sfera e zezë.

Zgjidhja. Shënojmë ngjarjet:

A: ″herën e parë është nxjerrë sfera e bardhë″;

B/A: ″herën e dytë është nxjerrë sfera e zezë, me kusht që herën e parë është nxjerrë sfera e bardhë″.

Probabilitetin e këtyre ngjarjeve janë:

$$P(A)=\frac{5}{16},\quad P(B/A)=\frac{11}{15},$$

sepse numri i rasteve të volitshme për nxjerrjen e sferës së zezë ka mbetur 11, ndërsa numri i të gjitha rasteve të mundshme tani është 15, meqë në nxjerrjen e përparme është marrë një sferë.

Shembulli 13. Është dhënë bashkësia e ngjarjeve $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ dhe ngjarjet $A = \{1,3,4\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{1,3,5\}$.

Gjejmë probabilitetin e ngjarjeve të kushtëzuara:

a. $P(A/B)$; **b.** $P(A/C)$; **c.** $P(B/C)$

Zgjidhja.

a. $A \cap B = \{3,4\}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$; atëherë:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{3}.$$

b. $A \cap C = \{1,3\}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{2}$; atëherë:

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{3}.$$

c. $P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{2}{3}$.

b. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesisht vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar probabilitetin e kushtëzuar. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Probabiliteti me kusht është probabiliteti i një ngjarje, duke ditur se një tjetër ngjarje ka ndodhur :

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\text{ dhe }B)}{P(B)}} \Rightarrow$$ Probabiliteti me kusht i A duke ditur se B ka ndodhur

$$\boxed{P(B\,|\,A)=\frac{P(A\text{ and }B)}{P(A)}} \Rightarrow$$ Probabiliteti me kusht i B duke ditur se A ka ndodhur

Ku: P(A dhe B) = probabiliteti i përbashkët i A dhe B

P(A) = Probabiliteti margjinal i A

P(B) = Probabiliteti margjinal i B

Tema: **9. PROBABILITETI**

Njësia mësimore: 9.8. Probabiliteti i ngjarjes së përbërë. Pavarësia e ngjarjeve

PLANIT I ORËS MËSIMORE			
Fusha kurrikulare: **MATEMATIKË** Lënda mësimore: **MATEMATIKË**	Koncepti bazë i fushës: **Të dhënat dhe probabiliteti**	Shkalla e kurrikulës: **V-të**	Klasa: **XI-të**

Tema: **9. PROBABILITETI**	Nxënësi: 1. Përcakton hapësirën e ngjarjeve të mundshme për një ngjarje të rastësishme; 2. Kryen veprimet me ngjarje; 3. Përkufizon probabilitetin dhe vërteton vetitë e tij; 4. Dallon ngjarjen e kushtëzuar/të përbërë dhe llogaritë probabilitetin e ngjarjes së kushtëzuar/të përbërë; 5. Përdorë teknologjinë për të zgjidhur probleme përmes probabilitetit.
Njësia mësimore: 9.8. Probabiliteti i ngjarjes së përbërë. Pavarësia e ngjarjeve	**Rezultatet e të nxënit sipas kompetencave të fushës së kurrikulës për njësinë mësimore:** 1. Përkufizon probabilitetin e ngjarjes së përbërë ; 2. Interpreton pavarësinë e ngjarjes.
Rezultatet e të nxënit për kompetencat kryesore të shkallës: Rezultatet e përgjithshme e të nxënit për temë Nxënësi: 1. Zhvillon kuptimin e hapësirës së ngjarjeve; 2. Interpreton ngjarje të ndryshme dhe llogaritë probabilitetin e tyre; 3. Demonstron njohuri dhe shkathtësi për zbatimin e vetive të probabilitetit në zgjidhjen e problemeve; 4. Kuptojnë probabilitetit pavarur dhe të kushtëzuar dhe përdorin ato për të interpretuar të dhënat; 5. Përdorë terminologjinë matematikore (gjasë, ngjarje, ngjarje e kushtëzuar, ngjarje e përbërë etj.) për të përshkruar situata të ndryshme nga matematika dhe nga jeta e përditshme; 6. Përdorë rregullat e probabilitetit për të zgjidhur probleme përmes përdorimit të teknologjinë.	
Qasja e të nxënit: Angazhimi individual, në dyshe dhe në grupe të nxënësit, duke diskutuar për zbatimin dhe analizimin e njohurive dhe aftësive ekzistuese për probabilitetin e kushtëzuar.	
Fjalët kyçe: Ngjarje e përbërë, probabiliteti i ngjarjes së përbërë, ngjarja e pavarur	
Kriteret e suksesit: *Mësimdhënësi,* kriteret e suksesit i cakton në bashkëpunim me nxënësit në fillim të orës mësimore 1. Të përkufizoni probabilitetin e ngjarjes së përbërë ; 2. Të interpretoni pavarësinë e ngjarjes.	
Burimet, mjetet e konkretizimit dhe materialet mësimore: Libri i nxënësit, libri i përmbledhje me detyra, internet, fletorja, lapsi dhe vizore.	
Lidhja me lëndët tjera mësimore dhe/apo me çështjet ndërkurrikulare dhe situata jetësore: Me fushën e gjuhës dhe komunikimit, me fushën e shkencave natyrore dhe në shkencat teknike.	
Metodologjia dhe veprimtaritë e nxënësve Rrjeti i komunikimit, vëzhgo - analizo - diskuto, punë e pavarur ose në grupe	

Përshkrimi i metodologjisë, teknikat e punës dhe veprimtaritë e punës me nxënës

Organizimi i orës së mësimit:

c. ***Lidhjen e njësisë mësimore me njohuritë e mëparshme të nxënësve*** *(rrjeti i komunikimit)*

Mësimdhënësi zhvillon veprimtari me të gjithë nxënësit në klasë duke shtruar pyetje për të paraqitur qëllimin e orës për njësinë mësimore me pikë nisje rezultatet e orës, bazuar në rezultatet e temës, kriteret e suksesit për konceptin e ri të njësisë mësimore. Pra në këtë njësi mësimore kërkohet nga nxënësit të përvetësojë probabilitetin e ngjarjeve të përbërë dhe pavarësinë e ngjarjeve.

Mësimdhënësi:

Shtron disa pyetje. P.sh.

1. Çka quhet ngjarje?
2. Kush po e thotë përkufizimin e probabilitetit të kushtëzuar?
3. Të shënohet në tabelë formula e përkufizimin e probabilitetit të kushtëzuar?

Pyetje këto që paraprakisht e orientojnë nxënësin kah njësia mësimore. Përgjigjet mësimdhënësi i pret prej nxënësve duke i orientuar kah njësi mësimore, por kuptohet duke i angazhuar të gjithë nxënësit në përgjigj.

c. ***Ndërtimi i njohurive të reja (vëzhgo –analizo-diskuto)***

Mësimdhënësi shënon në tabelë:

8. Probabiliteti i ngjarjes së përbërë. Pavarësia e ngjarjeve

Më parë përkufizuam ngjarjen $A\cap B$ si prerje e ngjarjeve A e B, e cila realizohet vetëm atëherë kur realizohen ngjarja A edhe ngjarja B njëkohësisht. Për këtë arsye themi se $A\cap B$ është ngjarje e përbërë. Pra, $A\cap B$ nuk quhet e përbërë për shkak të numrit të ngjarjeve elementare me të cilat realizohet $A\cap B$, por për shkak të realizimit të përnjëhershëm të tyre.

Shtrohet pyetja: si të gjendet probabiliteti i ngjarjes së përbërë $P(A\cap B)$ cila shpesh shkruhet (AB) ?

Meqë probabilitetit e ngjarjeve A dhe B janë pozitive, pra $P(A)>0$ e $P(B)>0$, atëherë nga përkufizimi i probabilitetit të kushtëzuar kemi:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \text{dhe} \quad P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}.$$

Nga barazimet e fundit marrim:

$$P(A\cap B)=P(B)\cdot P(A/B); \quad P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Formulat e fundit njihen si formulat për *probabilitetin e ngjarjes së përbërë.*

Formulat për *probabilitetin e ngjarjes së përbërë* tregojnë se: probabiliteti i ngjarjes së përbërë është i barabartë me prodhimin e probabiliteteve të njërës prej atyre ngjarjeve dhe probabilitetit të kushtëzuar të ngjarjes së dytë, me kusht që ngjarja e parë të jetë realizuar.

Formulat e probabilitetin e ngjarjes së përbërë i kanë anët e majta të barabarta, prandaj

$$P(B)\cdot P(A/B)=P(A)\cdot P(B/A).$$

Formula për probabilitetin e ngjarjes së përbërë mund të përgjithësohet edhe për tri e më shumë ngjarje. Psh.:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)\cdot P(C/A\cap B)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B).$$

Shembulli 14. Në kuti gjenden 9 sfera të bardha, 4 të kuqe dhe 3 të zeza. Rastësisht nxirren 3 sfera njëra pas tjetrës dhe nuk kthehen më kuti.

Të gjendet probabiliteti që sfera e nxjerrë së pari të jetë e bardhë, e dyta e kuqe dhe e treta e zezë.

Zgjidhja. Shënojmë ngjarjet:

A: ″sfera e parë e nxjerrë është e bardhë:;

B: ″sfera e dytë e nxjerrë është e kuqe;

C: ″sfera e tretë e nxjerrë është e zezë;

B/A: ″sfera e dytë e nxjerrë është e kuqe, me kusht që sfera e parë e nxjerrë është e bardhë″;

C/AB: ″sfera e tretë e nxjerrë është e zezë, me kusht që e para është bardhë dhe e dyta e kuqe″.

Meqë sferat nxjerra nuk kthehen, atëherë:

$$P(A)=\frac{9}{16},\ \ P(B/A)=\frac{4}{15}$$

Pastaj,

$$P(C/A\cap B)=\frac{3}{14},$$

sepse herën e parë është nxjerrë sfera e bardhë dhe në të dytën e kuqja.

Sipas rregullës për njehsimin e probabilitetit të përbërë, kemi:

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B).$$

$$=\frac{9}{16}\cdot\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{14}=\frac{9}{280}.$$

Shembulli 15. Secila prej 10 shkronjave të fjalës ″matematika″ është shkruar në një fletë të veçantë dhe të gjitha këto fletë futën në një kuti dhe përzihen. Rastësisht nxirret nga kutia një fletë dhe vetëm pas çdo katër nxjerrjeje të që të katër fletët e nxjerra kthehen prapë në kuti.

Sa është probabiliteti që në fletët e radhitura me atë rend me të cilin janë nxjerrë, të jetë fjala ″*mama*″?

Zgjidhja. Ngjarjen që së pari nxirret shkronja m e shënojmë me A, ngjarjen që e dyta me radhë të nxirret shkronja a e shënojmë me B, ngjarja C është kur e treta me radhë nxjerrët shkronja m, dhe ngjarja D kur e katërta me radhë nxirret shkronja a. Ngjarja e favorshme sipas kërkesës së detyrës është $A\cap B\cap C\cap D$. Secila nga ngjarjet elementare është e kushtëzuar prej realizimit të asaj që ka qenë para saj, d.m. th:

B është e kushtëzuar nga ngjarja A;

C është e kushtëzuar nga ngjarja $A\cap B$;

D është e kushtëzuar nga ngjarja $A\cap B\cap C$.

Atëherë, duke aplikuar tri herë formulën e përparme, fitojmë:

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=P(A\cap B\cap C)\cdot P_{A\cap B\cap C}(D)=P(A\cap B)\cdot P_{A\cap B}(C)\cdot P_{A\cap B\cap C}(D)=$$

$$=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P(B)\cdot P_{A\cap B}(C)\cdot P_{A\cap B\cap C}(D).$$

Në këtë rast kemi:

$$P(A)=\frac{2}{10},\quad P_A(B)=\frac{3}{9},\quad P_{AB}(C)=\frac{1}{8},\quad P_{A\cap B\cap C}(D)=\frac{2}{7}.$$

Përfundimisht, do të jetë:

$$P(A\cap B\cap C\cap D)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{420}.$$

Nëse probabiliteti i ngjarjes A mbetet i pandryshuar, pa marrë parasysh a është realizuar ngjarja B apo jo, A dhe B quhen *ngjarje të pavarura* dhe vlen

$$P(A/B)=P(A).$$

Nëse ngjarja A nuk varet nga B, atëherë as ngjarja B nuk varet nga ngjarjes A. Prandaj ,

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A/B)}{P(A)}=\frac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)}=P(B).$$

Pra: $\quad P(B/A)=P(B)$.

Prandaj, nëse A është e pavarur nga B, atëherë edhe B është e pavarur nga A. Dmth, ngjarjet A dhe B janë reciprokisht *të pavarura.*

Rrjedhimisht, probabiliteti i ngjarjes së përbërë $A\cap B$, nëse A dhe B janë reciprokisht të pavarura, njehsohet me formulës:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Shënim. Duhet vërejtur dallimin ndërmjet ngjarjeve të pavarura dhe ngjarjeve përjashtuese. Ngjarjet janë përjashtuese ose disjunkte kur si bashkësi kanë prerje boshe. Ngjarjet disjunkte nuk janë ngjarje të pavarura, sepse te këto

$$P(A)>0, P(B)>0, \;\; por \;\; P(A\cap B)=0,$$

që nuk e vërteton barazimin për probabilitetin e ngjarjeve të pavarura.

Shembulli 16. Në një shportë me 20 sfera ka 11 të bardha, kurse në kutinë tjetër me 33 sfera, 10 janë të bardha. Nëse nga secila shporta nxjerrim nga një sferë, sa është probabiliteti që të dy sferat e nxjerra të jenë të bardha?

Zgjidhja. Shënojmë ngjarjet me:

A: nga shporta e parë është nxjerrë sfera e bardhë;

B: nga shporta e dytë është nxjerrë sfera e bardhë;

AB: nga të dy shportat janë nxjerrë sfera të bardha.

Është e qartë se ngjarjet A e B janë reciprokisht të pavarura, sepse nxjerrja e çfarëdo sfere nga kutia e parë as nuk e shton as nuk e zvogëlon probabilitetin që nga shporta e dytë të nxirret sfera e bardhë.

Atëherë: $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{11}{20} \cdot \frac{10}{33} = \frac{1}{6}$.

Me rastin e realizimit të ngjarjes së përbërë mund të paraqiten mundësi të ndryshme.

Shembulli 17. Është i njohur fakti se daltonizmi (sëmundja nga e cila njeriu nuk dallon ngjyrat) është sëmundje trashëguese dhe që më shpesh paraqitet të meshkujt. Në tabelën e mëposhtme janë dhënë frekuencat relative të verbimit *kuq – gjelbër* në një populacion të madh njerëzor, të cilat do t'i trajtojmë si probabilitet:

	Meshkuj (M)	Femra (F)	GJITHSEJ
Nuk dallojnë kuq – gjelbër (V)	4,23%	0,65%	4,88%
Shohin normal (N)	48,48%	46,645%	95,12%
GJITHSEJ	52,71%	47,29%	100%

Të gjendet bashkësia e ngjarjeve elementare, të përcaktohen probabiltetet e disa ngjarjeve elementare të verbimit të meshkujve e femrave. Dhe në fund të shqyrtohet varshmëria e verbimit për ngjyra.

Zgjidhja. Tabela jep probabilitetit e prodhimeve të ngjarjeve. Probabiliteti që, p.sh., mashkulli të jetë i verbër për ngjyra do të jetë

$P(MV) = 4{,}23/100 = 0{,}0423$, etj.

Pra, bashkësinë e ngjarjeve elementare e formojnë çiftet $\{MV, FV, MN, FN\}$.

Prandaj, ngjarja që: *"personi i zgjedhur rastësisht nuk sheh kuq – gjelbër "* i përgjigjet nënbashkësia $\{MV, FV\}$, ndërsa probabiliteti i saj do të jetë 0,0488.

Tabela poashtu përmban probabilitetin që personi i zgjedhur rastësisht të jetë, p.sh., femër edhe këtu do të jetë:

$$P(\{FV, FN\}) = 0,4729.$$

Në vazhdim, mund të përcaktohet shkalla e verbimit për ngjyra vetëm për populacionin e meshkujve. Ky është probabilitet i kushtëzuar:

$$P(V/M) = \frac{P(VM)}{P(M)} = \frac{0,0423}{0,5271} = 0,0803 \quad \text{ose} \quad 8,03\%.$$

Ngjashëm, do të jetë për populacionin e femrave:

$$P(V/F) = 0,0137 \quad \text{ose} \quad 1,37\%. \square$$

Dhe në fund, nga tabela e mësipërme mund të përfundohet se verbërimi për ngjyra nuk është i pavarur nga gjinia:

$$P(V/M) = 0,803, \text{ ndërsa } P(V) = 0,0488.$$

Ngjashëm, $P(V) \neq P(V/F) = 0,0137$.

d. ***Prezantimi dhe demonstrimi i rezultateve të arritura*** *(punë e pavarur ose në grupe)*

Nxënësve bazuar nga shembujt e librit ai vet krijon shembuj.

Vlerësimi i nxënësve

Kjo veprimtari zhvillohet gjatë gjithë orës mësimore me qëllim për të parë progresin e tyre në përvetësimin e informatave dhe sa ata janë në gjendje të gjenerojnë informata të reja.

Mësimdhënësi përdor vlerësimin e vazhdueshëm, duke evidentuat çdo detaj të përgjigjeve të nxënësve, prej momentit që bënë pyetje. Po ashtu bën vlerësimin e punës së kryer nga grupet e nxënësve apo nxënës të veçantë. Kryesish vlerësohen përgjigjet e dhëna në shtruarje të pyetjeve dhe zgjidhjes së detyrave.

Detyrat dhe puna e pavarur

Nxënësit do të punojnë në fletore ushtrimin. Libri i nxënësit shembulli . Detyra jepen edhe nga libri i nxënësit dhe libri i përmbledhje detyrash dhe të merr vete në mënyrë të pavarur.

Reflektimi i orës mësimore:

Reflektimin e rrjedhën së orës mësimore, mësimdhënësi bën një vetë reflektim, vetë vlerësim për cilësinë e orës mësimore në raport me përmbushjen e planifikimit të orës mësimore, në mënyrë të veçantë në raport me ndikimin e orës në arritjet dhe rezultatet e nxënësve. Çka ka kaluar mirë, në çfarë duhet ti vihet kujdes dhe si mund ta plotësoi në orët me përsëritje dhe ushtrime për njësinë në realizim të plotë të rezultateve të të nxënit.

P.sh. vije në përfundim se nxënësit kanë përvetësuar probabilitetin e ngjarjes së përbërë. Në këtë mënyrë nxënësit i arrijnë rezultatet e të nxënit.

Mësimdhënësi i bëni vetes pyetje se cilat kompetenca të matematikës nxënësit po i arrin:

- Komunikimi dhe të shprehurit: që lidhen me konceptet elementare.

Nxënësi, diskuton në grupe në mënyre konstruktive të përmbledhur, duke dhënë dhe duke marrë informacione për një temë të caktuar, poashtu ai krijon një situatë logjike nga jeta e përditshme që kërkon zgjidhje dhe përcakton procedurën e zgjidhjes së problemit; modelon zgjidhjen e një problemit dhënë për temën, njëkohësisht ai demonstron shkathtësi funksionale të matematikës në jetën e përditshme, në përmbushjen ë kërkesave të ndryshme për kryerjen e detyrave, parashtron pyetje dhe shfaq mendime të konstruktuara për zgjidhjen e problemit apo detyrës.

Koment: Mësimdhënësi këtë e përdor si model të realizimit të një njësie mësimore, por ai është i lirë që të bëjë kreativitetin personal por të ketë një bazë pedagogjike. Gjithherë ka mbështetjen te rezultatet e të nxënit. Këto mundet me i pasurua me shembu dhe ushtrime.